Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana ...”
Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni, Ediţia a I-a, 2014

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ o submulţime cu $n+1$ elemente. Să se demonstreze următoarele afirmaţii:
a) Există în A două elemente cu suma lor egală cu $2n+1$.
b) Există în A două elemente din care unul divide pe celălalt.

Problema 2. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietăţile:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 20, \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 50, \quad a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 125.$$

a) Să se demonstreze că

$$x^2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + (a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Să se determine numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Problema 3. a) Să se arate că $\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1$, pentru orice $n \geq 2$.
b) Să se determine partea întreagă a numărului

$$\sqrt{2014 + \sqrt{2013 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

Problema 4. Un şirag de 15 mărgele, 5 roşii şi 10 negre, sunt înşirate pe un cerc. Să se precizeze dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă: ”pentru orice aranjare a mărgelelor există $r+n$ mărgele consecutive pe cerc, dintre care r sunt roşii şi n sunt negre”, în următoarele cazuri:
a) $r = 2, n = 4$;
b) $r = 3, n = 3$;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!