Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana...”

Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni

Ediţia a I-a, 2014

CLASA A IX-A

Soluţii

Problema 1. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ o mulţime cu $n+1$ elemente. Să se demonstreze următoarele afirmaţii:

a) Există în A două elemente cu suma lor egală cu $2n+1$.

b) Există în A două elemente din care unul divide pe celălalt.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Soluţie. a) Există în mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ doar n submulţimi de câte două elemente cu suma $2n+1$:

$$A_1 = \{1, 2n\}, A_2 = \{2, 2n-1\}, A_3 = \{3, 2n-2\}, \ldots, A_n = \{n, n+1\}$$

Din cele $n+1$ elemente din A, cel puţin două sunt în aceeaşi submulţime din cele n (cu suma $2n+1$).

b) Orice număr din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots 2n\}$ se scrie sub forma $N = 2^k \cdot p$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $p \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Printre cele $n+1$ elemente din A există două care au acelaşi p, deci $N_1 = 2^{k_1} \cdot p$ şi $N_2 = 2^{k_2} \cdot p$. Dacă $k_1 < k_2$, atunci $N_1 | N_2$. ■

Problema 2. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ cu proprietăţile:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 20, \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 50, \quad a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 125.$$

a) Să se demonstreze că

$$x^2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + (a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Să se determine numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Soluţie.

Soluţia 1. a) Observăm că

$$x^2 \sum_{i=1}^n a_i - 2x \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i^3 = \sum_{i=1}^n a_i (x - a_i)^2 = \left(x\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^3} \right)^2,$$

care este evident mai mare sau egală decât 0 pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b)

Datorită formei ultimului termen observăm că expresia de mai sus se anulează în

$$x_0 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^3}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i}},$$

rezultă $\sum_{i=1}^n a_i (x_0 - a_i)^2 = 0$ şi cum $a_i(x_0 - a_i)^2 \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, rezultă

$$x_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Revenind la relaţiile date obţinem $nx_0 = 20$, $nx_0^2 = 50$ şi $nx_0^3 = 125$ din care rezultă $n = 8$ şi $x_0 = \frac{5}{2} = a_1 = a_2 = \ldots = a_8$.

Soluţia 2. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{a_i^3} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i^3})^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_i^3 \Leftrightarrow$$

$$50^2 \leq 20 \cdot 125 \Leftrightarrow 2500 \leq 2500,$$

deci inegalitatea devine egalitate. Rezultă că $a_1, a_2, \dots, a_n$ şi $a_1^3, a_2^3, \dots, a_n^3$ sunt proporţionale

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^3}{a_1} = \frac{a_2^3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n^3}{a_n} \Leftrightarrow a_1^2 = a_2^2 = \ldots = a_n^2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a.$$

Revenind în relaţiile date avem:

$$na = 20, \quad na^2 = 50, \quad na^3 = 125.$$

Din primele două relaţii rezultă $a = \frac{5}{2}$ şi $n = 8$, deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_8 = \frac{5}{2}$ (şi $n = 8$).

■

Problema 3. a) Să se arate că $\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1$, pentru orice $n\geq$ 2.

b) Să se determine partea întreagă a numărului

$$\sqrt{2014+\sqrt{2013+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

Maria Pop, Cluj-Napoca

Soluţie.

a) Vom demonstra prin inducţie.

Pentru $n=2$ avem

$$\sqrt{2+\sqrt{1}}<\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3}<\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow 3<3+2\sqrt{2}.$$

Avem:

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\ldots}}<\sqrt{n}+1 \Leftrightarrow n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots}}<n+2\sqrt{n}+1 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}+\ldots}<2\sqrt{n}+1.$$

Conform ipotezei de inducţie:

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots}}<\sqrt{n-1}+1$$

şi este suficient să arătăm că

$$\sqrt{n-1}<2\sqrt{n} \Leftrightarrow n-1<4n \Leftrightarrow 3n+1>0.$$

b) Avem: $44^2=1936$ şi $45^2=2025$ astfel că $44<\sqrt{2013}<45$, deci

$$a>\sqrt{2014+\sqrt{2013}}>\sqrt{2058}>45.$$

Pe de altă parte, din a) rezultă:

$$\sqrt{2014+\sqrt{2013+\ldots}}<\sqrt{2014}+1<45+1=46.$$

Astfel că partea întreagă este 45. ∎

Problema 4. Un şirag de 15 mărgele, 5 roşii şi 10 negre, sunt înşirate pe un cerc. Să se precizeze dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă: "pentru orice aranjare a mărgelelor există $r+n$ mărgele consecutive pe cerc, dintre care r sunt roşii şi n sunt negre", în următoarele cazuri:

a) $r = 2, n = 4$;

b) $r = 3, n = 3$;

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

a) Vom arăta că afirmaţia este adevărată. Numerotăm mărgelele de la 1 la 15, într-un sens ales pe cerc şi considerăm secvenţele de câte 6 mărgele consecutive:

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, S_2 = \{2,3,4,5,6,7\}, \ldots, S_{14} = \{14,15,1,2,3,4\}, S_{15} = \{15,1,2,3,4,5\}.$$

Notăm cu r_i numărul mărgelelor roşii din secvenţa S_i, $i = \overline{1,15}$. Deoarece fiecare mărgea apare în 6 secvenţe rezultă că

$$\sum_{i=1}^{15} r_i = 5 \cdot 6 = 30.$$

Dacă prin absurd $r_i \neq 2$ pentru orice $i = \overline{1,15}$, atunci există două secvenţe consecutive S_i şi S_{i+1} astfel ca $r_i < 2$ c si $r_{i+1} > 2$ (sau invers), deci $|r_{i+1} - r_i| \geq 2$. Dar în S_i şi S_{i+1}, 5 mărgele sunt comune şi atunci diferenţa $|r_{i+1} - r_i|$ nu poate fi decât 0 sau 1, contradicţie.

b) Afirmaţia este falsă, aranjăm mărgelele astfel: 1 roşie, 2 şi 3 negre, 4 roşie, 5 şi 6 negre, 7 roşie, 8 şi 9 negre, 10 roşie, 11 şi 12 negre, 13 roşie, 14 şi 15 negre. ■