Concursul Interjudeţean de Matematică "Mens Sana ..."
Colegiul Naţional "Avram Iancu" Câmpeni, Ediţia a I-a, 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră numerele reale: $x = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots}}}}$,

$$y = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \ldots}}}}\,, \quad z = \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \ldots}}}}$$

(în fiecare număr apar o infinitate de radicali suprapuşi). Să se precizeze pentru fiecare număr dacă este raţional sau iraţional (cu demonstraţie!). *Indicaţie:* $y = \sqrt{3 - z}$.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există $a > 0$ astfel ca funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + a)$, $x \in \mathbb{R}$ să fie funcţie pară şi funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x + 2a)$, $x \in \mathbb{R}$, să fie funcţie impară.

a) Să se arate că funcţia f este funcţie impară şi funcţie periodică de perioadă $T = 4a$.

b) Daţi exemplu de funcţie f şi număr $a > 0$ care verifică condiţiile din enunţ.

Problema 3. a) Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(-x) = \sin x + \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Să se arate că există o infinitate de funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(x) + f(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 4. a) Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ atunci au loc implicaţiile:

$$\sqrt{2}|z + 1| = |z + i| + |z - i| \Rightarrow |z| = 1 \text{ şi } \operatorname{Re} z \geq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{2}|z - 1| = |z + i| + |z - i| \Rightarrow |z| = 1 \text{ şi } \operatorname{Re} z \leq 0 \quad (2).$$

b) Să se determine locul geometric al punctelor M din planul pătratului $ABCD$ pentru care are loc relaţia:

$$\sqrt{2} max\{MA; MC\} = MB + MD$$

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!