Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana...”

Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni

Ediţia a I-a, 2014

CLASA A X-A

Soluţii

Problema 1. Se consideră numerele reale:

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots}}}},$$

$$y = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \ldots}}}},$$

$$z = \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \ldots}}}}$$

(în fiecare număr apar o infinitate de radicali suprapuşi).

Să se precizeze pentru fiecare număr dacă este raţional sau iraţional (cu demonstraţie!).

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Se observă relaţiile:

$$x = \sqrt{3 + x} \tag{1}$$

$$y = \sqrt{3 - z} \tag{2}$$

$$z = \sqrt{3 + y} \tag{3}$$

Din prima relaţie obţinem $x > 0$ şi $x^2 = 3 + x \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ deci

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Din (2) şi (3) rezultă $y > 0$, $z > 0$, $z < 3$ şi prin ridicare la pătrat obţinem:

$$y^2 = 3 - z \tag{4}$$

$$z^2 = 3 + y \tag{5}$$

şi apoi

$$z^2 - y^2 = z + y \Leftrightarrow (z + y)(z - y - 1) = 0 \Rightarrow z - y = 1$$

sau

$$z = y + 1 \tag{6}$$

Din (4) şi (6) obţinem $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$, $y_2 = -2 \Rightarrow y = 1$ şi $z = 2$, deci $y \in \mathbb{Q}$ şi $z \in \mathbb{Q}$. ■

Problema 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie pentru care există $a>0$ astfel ca funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+a)$, $x\in\mathbb{R}$ să fie funcţie pară şi funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x+2a)$, $x\in\mathbb{R}$, să fie funcţie impară.

a) Să se arate că funcţia f este funcţie impară şi funcţie periodică.

b) Daţi exemplu de funcţie f şi număr $a>0$ care verifică condiţiile din enunţ.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Condiţiile din enunţ sunt:

$$f(x+a)\overset{(1)}{=}f(-x+a),\ x\in\mathbb{R};\quad f(-x+2a)\overset{(2)}{=}-f(x+2a),\ x\in\mathbb{R}.$$

Avem

$$f(x)=f(-(a-x)+a)\overset{(1)}{=}f(a-x+a)=f(-x+2a)\overset{(2)}{=}-f(x+2a)\Leftrightarrow$$

$$f(x)\overset{(3)}{=}-f(x+2a),\ x\in\mathbb{R}.$$

Din (3) avem:

$$f(x+2a)=-f(x+2a+2a)=-f(x+4a)$$

şi acum din (3)

$$f(x)=-f(x+2a)=f(x+4a),\ x\in\mathbb{R}.$$

Deci f este periodică de perioadă $T=4a$. Acum

$$f(x-2a)=f(x-2a+4a)=f(x+2a)\overset{(2)}{=}-f(-x+2a)\Leftrightarrow$$

$$f(-t)=-f(t),\ t=2a-x\in\mathbb{R},$$

deci f este funcţie impară.

b) $f(x)=\sin x,\ a=\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)=-\cos x$ (pară), $h(x)=-\sin x$ (impară). ■

Problema 3. a) Să se arate că nu există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)+f(-x)=\sin x+\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Să se arate că există o infinitate de funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(x)+f(-x)=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Ştim că

$$f(x)+f(-x)=\sin x+\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Dând la x valoarea $-x$ obţinem $f(-x)+f(x)=\sin(-x)+\cos(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă

$$f(x)+f(-x)=-\sin x+\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Scădem relaţia (1) din (2) şi obţinem $-2\sin x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ceea ce este fals.

b) Un caz particular de funcţie ce verifică relaţia dată este $f_0(x)=\frac{\cos x}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Mulţimea funcţiilor f_0+h unde h parcurge mulţimea funcţiilor impare reprezintă o mulţime infinită de funcţii cerute. ■

Problema 4. a) Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ atunci au loc implicaţiile:

$$\sqrt{2}|z+1| = |z+i| + |z-i| \Rightarrow |z| = 1 \text{ şi Re } z \geq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{2}|z-1| = |z+i| + |z-i| \Rightarrow |z| = 1 \text{ şi Re } z \leq 0 \quad (2).$$

b) Să se determine locul geometric al punctelor M din planul pătratului $ABCD$ pentru care are loc relaţia:

$$\sqrt{2}\max\{MA, MC\} = MB + MD$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

a) Ridicând la pătrat relaţia din (1) rezultă:

$$2(z+1)(\overline{z}+1) = (z+i)(\overline{z}-i) + (z-i)(\overline{z}+i) + 2|z+i||z-i| \Leftrightarrow$$

$$z + \overline{z} = |z+i||z-i| = |z^2+1| \Rightarrow 2\text{Re } z \geq 0 \Rightarrow \text{Re } z \geq 0$$

Dar

$$|z^2+1|^2 = (z^2+1)(\overline{z}^2+1) = z^2 \cdot \overline{z}^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1$$

$$(z+\overline{z})^2 = z^2 + \overline{z}^2 + 2z \cdot \overline{z}$$

şi egalitatea devine:

$$z^2 \cdot \overline{z}^2 - 2z \cdot \overline{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (z \cdot \overline{z} - 1)^2 = 0, z \cdot \overline{z} = 1, |z| = 1$$

Analog se demonstrează implicaţia (2).

b) Putem alege metrica şi poziţia pătratului în plan astfel ca în planul complex să avem

$$A = 1, B = i, C = -1, D = -i.$$

Dacă $\max\{MA, MC\} = MA \Rightarrow$ M se află în semiplanul Re $z \leq 0$ şi din $\sqrt{2}MA = MB + MC$ rezultă $\sqrt{2}|z-1| = |z+i| + |z-i| \Rightarrow |z| = 1$, deci M se află pe semicercul BCD. Analog dacă $\max\{MA, MC\} = MC \Rightarrow$ M se află pe semicercul DAB. Locul geometric este cercul circumscris pătratului.

∎