Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana ...”
Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni, Ediţia a I-a, 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie a_0, a_1, a_2 numere pozitive şi şirul definit prin relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}, \forall n \geq 2$$

a) Să se arate că dacă $a_0 = a_1 = a_2$ atunci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit.
b) Să se arate că pentru orice a_0, a_1, a_2 numere pozitive şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se determine limita sa.

Problema 2. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ definite de relaţiile de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4} \quad \text{şi} \quad y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde x_0 şi y_0 sunt numere reale arbitrare date. Să se arate că cele două şiruri sunt convergente şi să se determine limitele lor.

Problema 3. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $|detA| \geq 1$. Notăm puterile naturale ale matricei A cu

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că şirurile de numere reale: $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ sunt convergente dacă şi numai dacă $A = I_2$.

Problema 4. Se dă matricea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$;
b) Există $q \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!