Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana...”

Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni

Ediţia a I-a, 2014

CLASA A XI-A

Soluţii

Problema 1. Fie a_0, a_1, a_2 numere pozitive şi şirul definit prin relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}, \forall n \geq 2$$

a) Dacă $a_0 = a_1 = a_2$ să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton.

b) Pentru orice a_0, a_1, a_2 să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se determine limita sa.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Se arată prin inducţie că dacă $a_0 = a_1 = a_2 = a \leq 9$ atunci şirul este crescător şi $a_n \leq 9, \forall n$ iar dacă $a > 9$ atunci şirul este descrescător şi mărginit inferior de 9. În ambele cazuri şirul este convergent şi trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem

$$l = 3\sqrt{l},\ l(l-9) = 0,\ \text{deci } l \in \{0, 9\}.$$

Din cele de mai sus limita nu poate fi 0, deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 9.$$

b)

Fie $b = \min\{a_0, a_1, a_2\}$ şi $c = \max\{a_0, a_1, a_2\}$. Considerăm şirurile $(b_n)_n$ şi $(c_n)_n$ definite prin aceeaşi recurenţă dar cu termenii iniţiali schimbaţi:

$$b_0 = b_1 = b_2 = b,\quad b_{n+1} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{b_{n-2}}; n \geq 2$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c,\quad c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} + \sqrt{c_{n-2}}; n \geq 2.$$

Prin inducţie rezultă $b_n \leq a_n \leq c_n, \forall n$. Deoarece conform punctului a) avem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 9$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 9$$

■

Problema 2. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ definite de relaţiile de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4} \quad \text{şi} \quad y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde x_0 şi y_0 sunt numere reale arbitrare date. Să se arate că cele două şiruri sunt convergente şi să se determine limitele lor.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Notăm

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

unde $n \in \mathbb{N}$ şi matricea matricea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Atunci $X_{n+1} = AX_n = A^n X_1$ sau $X_n = A^n X_0$. Pentru determinarea lui A^n considerăm ecuaţia caracteristică asociată matricei A:

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0,$$

în cazul nostru devine

$$20\lambda^2 - 13\lambda - 7 = 0$$

cu soluţiile $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -\frac{7}{20}$, deci

$$A^n = B + \left(-\frac{7}{20}\right)^n C, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} B + \left(-\frac{7}{20}\right) C = A \\ B + \frac{49}{400} C = A^2 \end{cases}$$

de unde rezultă

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix}$$

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty} (A^n X_0) = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \left[B + \left(-\frac{7}{20}\right)^n C \right] X_0 = BX_0$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} X_n == \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4x_0 + 3y_0 \\ 4x_0 + 3y_0 \end{bmatrix}$$

şi în concluzie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{4x_0 + 3y_0}{9}.$$

■

Problema 3. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $|detA| \geq 1$. Notăm puterile naturale ale matricei A cu

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că şirurile de numere reale: $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ sunt convergente dacă şi numai dacă $A = I_2$. .

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Dacă şirurile sunt convergente atunci şirul cu termenul general

$$a_n d_n - b_n c_n = detA^n = (detA)^n$$

este convergent. Dar cum şirul $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent doar pentru $\alpha \in (-1,1]$ rezultă $detA \in (-1,1]$ şi din condiţia $|detA| \geq 1$ rezultă $detA = 1$. Evident A verifică relatţia:

$$A^2 - (a+d)A + (detA)I_2 = O_2$$

şi înmulţind cu A^{n-1} obţinem:

$$(*) \quad A^{n+1} - (a+d)A^n + (detA)A^{n-1} = O_2.$$

Deci toate şirurile verifică relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} - (a+d)x_n + (detA)x_{n-1} = 0$$

Trecând la limită în relaţie obţinem:

$$l_x(1-(a+d)+detA) = 0 \Leftrightarrow$$

$$l_x(2-(a+d)) = 0 \ \text{ unde } l_x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dacă $a+d \neq 2$ ar rezulta $l_x = 0$ pentru $x \in \{a,b,c,d\}$ (toate şirurile ar avea limita 0), dacă am avea $\lim_{n\to\infty}(a_n d_n - b_n c_n) = 0$, contradicţie cu $(detA)^n = 1$ deci avem $a+d=2$. Astfel relaţia (*) devine

$$A^{n+1} - 2A^n + A^{n-1} = O_2$$

sau

$$A^{n+1} - A^n = A^n - A^{n-1}, n \geq 1$$

Dacă $A^n - A^{n-1} = A - I_2$ şi prin adunarea iteratelor

$$A^n = I_2 + n(A - I_2), n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci şirurile vor fi

$$a_n = 1 + n(a-1)$$

$$b_n = nb$$

$$c_n = nc$$

$$d_n = 1 + n(d-1)$$

care sunt convergente dacă şi numai dacă $a = d = 1, b = c = 0$, deci $A = I_2$.

Reciproc: Dacă $A = I_2$, $A^n = I_2$ şirurile $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ sunt constante.

Observaţie. Se pot da condiţii necesare şi suficiente ca şirul de matrice $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent. ■

Problema 4. Se dă matricea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$;

b) Există $q \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

a) $\Rightarrow$ *b*). Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$. Trecând la determinanţi obţinem $(det A)^n = 1$ şi cum $det A = a^2 + b^2 \geq 0$ deducem că $det\ A = a^2 + b^2 = 1$, ceea ce arată că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = \cos t, b = \sin t$. Deci

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

şi atunci

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & coskt \end{bmatrix} \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce arată că $A^n = I_2$ dacă şi numai dacă

$$A = \begin{bmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aici rezultă că $\cos nt = 1$ şi $\sin nt = 0$, adică $nt = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, de unde deducem $t = \frac{2p}{n}\pi = q\pi$, unde $q = \frac{2p}{n} \in \mathbb{Q}$ şi prin urmare $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$.

b) $\Rightarrow$ *a*). Fie $a = \cos q\pi, b = \sin q\pi$ cu $q \in \mathbb{Q}$, adică $q = \frac{u}{v}$ cu $u \in \mathbb{Z}$ şi $v \in \mathbb{N}^*$. Putem scrie $q = \frac{2u}{2v}$ şi atunci

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{2u\pi}{2v} & \sin \frac{2u\pi}{2v} \\ -\sin \frac{2u\pi}{2v} & \cos \frac{2u\pi}{2v} \end{bmatrix}.$$

rezultă imediat că $A^{2v} = I_2$ şi deci luând $n = 2v \in \mathbb{N}^*$ deducem că $A^n = I_2$. ∎