Concursul Interjudeţean de Matematică "Mens Sana ..."
Colegiul Naţional "Avram Iancu" Câmpeni, Ediţia a I-a, 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$$f(0) = 0,\ f(3x) \leq f(x) + 8x, \quad f(5x) \geq f(x) + 16x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Indicaţie: Se caută mai întâi o soluţie de forma $f_0(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că:
a) Pentru orice $x, y \in G$ elementele x şi yxy^{-1} au acelaşi ordin.
b) Dacă în G avem un singur element de ordin doi atunci acesta comută cu toate elementele lui G. Daţi exemplu de un astfel de grup infinit.
c) G nu poate conţine exact două elemente de ordin doi. (Spunem ca un element $z \in G$ are *ordinul* n dacă $z^n = 1$ şi $z^{n-1} \neq 1$, unde 1 este elementul unitate al grupului G).

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea $A^3 - A^2 - A = 2I_n$.
a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $|detA| = 2^k$.
b) Să se arate că dacă $|detA| = 2^n$ atunci $A = 2I_n$.
c) Să se arate că dacă $|detA| = 1$ atunci $A^3 = I_n$.

Problema 4. Să se determine numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(0) = 0$ şi $F(-x) \cdot f(x) = x^n,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Indicaţie: Căutaţi funcţii de forma $f(x) = \beta x^\alpha,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!