Concursul Interjudeţean de Matematică “Mens Sana...”

Colegiul Naţional “Avram Iancu” Câmpeni

Ediţia a I-a, 2014

CLASA A XII-A

Soluţii

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$$f(0) = 0,\ f(3x) \le f(x) + 8x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

şi

$$f(5x) \ge f(x) + 16x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Căutăm soluţii particulare, de forma $f(x) = ax$ şi obţinem $f(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Facem substituţia $f(x) = 4x + g(x)$ şi obţinem pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ condiţiile

$$g(0) = 0,\ g(3x) \le g(x) \text{ şi } g(5x) \ge g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

sau

$$g(t) \le g\left(\frac{1}{3}t\right),\ \forall\ t \text{ şi } g(t) \ge g\left(\frac{1}{5}t\right),\ \forall\ t.$$

Înlocuind succesiv în prima relaţie t cu $\frac{1}{3}t$ şi în a doua t cu $\frac{1}{5}t$ obţinem:

$$g\left(\frac{1}{5^n}t\right) \le g(t) \le g\left(\frac{1}{3^n}t\right),\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Trecând la limită rezultă

$$g(0) \le g(t) \le g(0),\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

În concluzie $g(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ şi $f(x) = 4x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

■

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că:

a) Pentru orice $x, y \in G$ elementele x şi yxy^{-1} au acelaşi ordin.

b) Dacă în G avem un singur element de ordin doi atunci acesta comută cu toate elementele lui G. Daţi exemplu de un astfel de grup infinit.

c) G nu poate conţine exact două elemente de ordin doi.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Avem

$$(yxy^{-1})^n = 1 \Leftrightarrow yxy^{-1}yxy^{-1} \dots yxy^{-1} = 1 \Leftrightarrow yx^n y^{-1} = 1 \Leftrightarrow x^n = 1,$$

deci $\mathrm{ord}(yxy^{-1}) = \mathrm{ord}(x)$.

b) Fie $x \in G$ unicul element de ordin doi. Conform a), pentru orice $y \in G$ elementul yxy^{-1} are ordin doi şi din unicitate rezultă

$$x = yxy^{-1} \Leftrightarrow xy = yx.$$

Un exemplu este $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, în care singurul element de ordin doi este -1.

c) Fie $x, y \in G$, $x \neq y$ două elemente de ordin doi. Vom arăta că G mai conţine şi alt element de ordin doi. Fie $z = xyx^{-1}$ care conform a) are tot ordin doi şi dacă $x \neq z$ şi $y \neq z$ am găsit trei elemente de ordin doi.

În ipoteza $x = z$ avem $x = xyx^{-1} \Leftrightarrow yx^{-1} = 1 \Leftrightarrow x = y$ (fals).

În ipoteza $y = z$ avem $y = xyx^{-1} \Leftrightarrow xy = yx$.

În acest caz arătăm că elementul $u = xy$ are ordin doi şi evident $u \neq x$ şi $i \neq y$, deci iarăşi am găsit trei elemente de ordin doi. Avem

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = (xy)(yx) = xy^2x = x^2 = 1,$$

deci $\mathrm{ord}(xy) = 2$.

Observaţie. Grupul lui Klein $K_4 = \{id, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_0\}$ (al simetriilor unui dreptunghi) este un grup cu exact trei elemente de ordin doi. ∎

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea $A^3 - A^2 - A = 2I_n$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $|detA| = 2^k$.

b) Să se arate că dacă $|detA| = 2^n$ atunci $A = 2I_n$.

c) Să se arate că dacă $|detA| = 1$ atunci $A^3 = I_n$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) O valoare proprie λ a matricei A verifică relaţia $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 2 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$, deci $\lambda = 2$ sau $|\lambda| = 1$. Avem $|detA| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n| = 2^k$ unde k este multiplicitatea valorii proprii egale cu 2.

b) Dacă $|detA| = 2^n$ atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 2$. Matricea $A^2 + A + I_2$ este inversabilă şi din relaţia $(A - 2I_n)(A^2 + A + I_2) = 0$ rezultă $A = 2I_n$.

c) Din $|detA| = 1$ rezultă că toate valorile proprii au modulul 1. Matricea $A - 2I_n$ este inversabilă şi din relaţia $(A - 2I_n)(A^2 + A + I_2) = 0$ rezultă $A^2 + A + I_2 = 0$ si folosind relaţia iniţială

$$A^3 - (A^2 + A + I_2) = I_n$$

adică $A^3 = I_n$.

■

Problema 4.

Să se determine numerele naturale nenule n pentru care există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F(0)=0$ şi $F(-x)\cdot f(x)=x^n,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Vom arăta că $n=4k+3, k\in\mathbb{N}$. Din relaţia

$$F(-x)\cdot f(x)=x^n,\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Înlocuind x cu $-x$ obţinem

$$F(x)\cdot f(-x)=(-1)^n x^n,\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Avem că

$$(F(-x)F(x))'=F(-x)f(x)-f(-x)F(x)=x^n-(-1)x^n=(1-(-1)^n)x^n,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Pentru n par avem $(F(-x)F(x))'=0\Rightarrow F(-x)\cdot F(x)=C$ şi din $F(0)=0$ rezultă $C=0$ deci $F(-x)F(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Înmulţind relaţiile (1) şi (2) rezultă $0=(-1)^n x^{2n},\forall x\in\mathbb{R}$ fals. Deci prentru n par nu există astfel de funcţii.

Pentru $n=2k+1$ impar avem

$$(F(-x)F(x))'=2x^n,\forall x\in\mathbb{R}$$

deci $F(-x)F(x)=2\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\forall x\in\mathbb{R}$ şi avem $F(0)=0$ rezultă $C=0$ deci

$$F(-x)F(x)=2\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (3).$$

Înmulţind (1) cu $F(x)$ şi ţinând cont de (3) obţinem

$$2\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)=x^nF(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$$

$$2\frac{x}{n+1}f(x)=F(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow xf(x)-\frac{n+1}{2}F(x)=0\Leftrightarrow$$

$$(F(x)\cdot x^{-\frac{n+1}{2}})'=0\Leftrightarrow F(x)x^{-\frac{n+1}{2}}=C\Rightarrow$$

$$F(x)=Cx^{\frac{n+1}{2}};\ f(x)=C\frac{n+1}{2}x^{\frac{n-1}{2}}\Rightarrow$$

$$F(-x)f(x)=C^2(-1)^{\frac{n+1}{2}}x^n=x^n\Leftrightarrow C^2(-1)^{\frac{n+1}{2}}=1$$

Dacă $\frac{n+1}{2}=\frac{2k+2}{2}=k+1$ este impar nu e posibil. Rămâne că k trebuie sa fie impar

$$n=4k+3.$$

■