Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

BAREM

Subiectul 1 Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care împărţite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 şi restul $\overline{bc}-8$

Soluţie şi barem

Scrie $\overline{abc} = 4\cdot\overline{bc}+\overline{bc}-8$	1 p
$\overline{bc} = 25\cdot a+2$	1 p
$25a+2<100 \Rightarrow a<4$	1 p
$a=1 \Rightarrow \overline{bc}=27$	1 p
$a=2 \Rightarrow \overline{bc}=52$	1 p
$a=3 \Rightarrow \overline{bc}=77$	1 p
$\overline{abc} \in \{127, 252, 377\}$	1 p

Subiectul 2 1. Arătaţi că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferenţă de două pătrate perfecte.

2. Demonstraţi că numărul $B=2015+2+6+10+\ldots+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluţie şi barem

1. $A=6^{2012}\cdot 6^3$	1 p
$A=6^{2012}\cdot(225-9)$	2 p
$A=(15\cdot 6^{1006})^2-(3\cdot 6^{1006})^2$	1 p
2. $B=2015+2\cdot(1+3+5+\cdots+2013)$	1 p
$B=(1+3+5+\cdots+2013)+(1+3+5+\cdots+2013+2015)$	1 p
$B=1007^2+1008^2$	1 p

Subiectul 3 Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot4^{332}-2^{663}$ şi $b=3^{500}-2\cdot3^{499}-2\cdot3^{498}-\ldots-2\cdot3^{443}-2\cdot3^{442}$

a) Să se compare numerele a şi b.

b) Să se determine cel mai mic număr *p prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se dividă cu 10.

Soluție și barem

a) $a = 2^{633}$ 1 p

$b = 3^{500} - (3-1)\cdot 3^{499} - (3-1)\cdot 3^{498} - \dots - (3-1)\cdot 3^{442}$ 1 p

$b = 3^{442}$ 1 p

$a < b$ 1 p

b) $UC(2^{663}) = 8;\quad UC(3^{442}) = 9$ 1 p

$UC(a+b+p) = 0 \Rightarrow \quad U(p) = 3$ 1 p

$p = 13$ 1 p

Subiectul 4 Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale

(1,1)

(1,2) (2,1)

(1,3) (2,2) (3,1)

(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)

....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Soluție și barem

a) Scrie al 9-lea rând:

$(1,9); (2,8); (3,7); (4,6); (5,5); (6,4); (7,3); (8,2); (9,1)$ 1 p

Perechea este (5,5)

b) Scrie rândul 2010

$(1,2010), (2,2009), (3,2008), (4,2007), (5,2006), \dots, (1000,1011), \dots, (2010,1)$ 1 p

Perechea cerută este (1000,1011) 1 p

c) Rândul 1005

$(1,1005), (2,1004), (3,1003), \dots, (1005,1), (1004,2) \dots \Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1006

$(1,1006), (2,1005), (3,1004), \dots, (1005,2), (1006,1) \dots \Rightarrow$ 2 perechi

Rândul 1007

$(1,1007), (2,1006), (3,1005), \dots, (1005,3), (1006,2), (1007,1) \Rightarrow$ 2 perechi

1 p

....