Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2-3x+2|=\left|\left|x-\frac{1}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n,\ n\in\mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Soluție și barem

a) Prelucrând ecuația se obține:

1. $x^2-3x+\frac{8}{3}-\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ sau 2. $x^2-3x+\frac{4}{3}+\left|x-\frac{1}{3}\right|=0$ 1p

Dacă $x<\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $3x^2-6x+7=0$ care nu are soluții reale, iar din 2. Rezultă ecuația $3x^2-12x+5=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{6+\sqrt{21}}{3}$ și $x_2=\frac{6-\sqrt{21}}{3}$ ambele mai mari decât $\frac{1}{3}$. 1p

Dacă $x>\frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $x^2-4x+3=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=3$, iar din 2. Rezultă ecuația $x^2-2x+1=0$ cu soluțiile $x_1=x_2=1>\frac{1}{3}$..

Așadar, mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,3\}$ 1p

b)

$\left[\frac{n-1}{2}\right]=k \Leftrightarrow k\le\frac{n-1}{2}<k+1 \Rightarrow 2k\le n-1<2k+2 \Rightarrow 2k+1\le n<2k+3 \Rightarrow n\in\{2k+1,2k+2\}$ 1p

Dacă $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$:

$$k+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=2k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)^2-(2k+1)}{3}\right]=k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)(2k)}{3}\right]=k+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k+1\le\frac{2k(2k+1)}{3}<k+2 \Leftrightarrow 3k+3\le 4k^2+2k<3k+6\,\big|-(3k+3)$$

$0\le 4k^2-k-3<3$, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4k^2-k-3\in\mathbb{Z}$. Analizăm situațiile:

$4k^2-k-3=0\Rightarrow k_1=\frac{1-7}{8}\notin\mathbb{Z},\ k_2=\frac{1+7}{8}=1\in\mathbb{Z}$

$4k^2-k-3=1 \Rightarrow 4k^2-k-4=0, \Delta=65 \neq \text{pp}$

$4k^2-k-3=2 \Rightarrow k_1=\frac{1-9}{8}=-1, k_2=\frac{1+9}{8}\notin\mathbb{Z}$

$k\in\{-1,1\} \Rightarrow n\in\{-1,3\}$ 2p

Dacă $n=2k+2, k\in\mathbb{Z}$:

$$k+\left[\frac{n(n-1)}{3}\right]=2k+2 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{3}\right]=k+2 \Leftrightarrow k+2\leq\frac{4k^2+6k+2}{3}<k+3 \Leftrightarrow$$

$3k+6\leq 4k^2+6k+2<3k+9\,|-3k-6 \Leftrightarrow 0\leq 4k^2+3k-4<3$. Analizăm situațiile:

$4k^2+3k-4=0 \Rightarrow \Delta=73\neq pp$

$4k^2+3k-4=1 \Rightarrow \Delta=89\neq pp$

$4k^2+3k-4=2 \Rightarrow \Delta=105\neq pp$. Nu avem soluții în acest caz. 1p

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, a>0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2}\geq\frac{a}{2}$$

Soluție și barem

Avem

$\frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{2}\geq x_ix_{i+1} \Leftrightarrow \frac{x_ix_{i+1}}{x_i^2+x_{i+1}^2}\leq\frac{1}{2}$ .... 2p.

$\Rightarrow \frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2}=x_i-x_{i+1}\frac{x_ix_{i+1}}{x_i^2+x_{i+1}^2}\geq x_i-\frac{x_{i+1}}{2}$ 2p

Adunând relațiile pentru $i=1,2,\ldots,n$ obținem

$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2}\geq\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}=\frac{a}{2}$ .... 3p.

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a=BC, b=AC, c=AB$.