



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Țirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a IX – a

Problema 1. Pe circumferința unui cerc se consideră 7 puncte care sunt colorate fiecare cu roșu sau negru. Prin transformare înțelegem schimbarea culorilor a trei puncte consecutive (din negru în roșu și din roșu în negru).

- Să se arate că printr-o succesiune de transformări putem obține orice colorare dorim.
- Dacă pe cerc se consideră 6 puncte rămâne adevărată afirmația a) adevărată?

Problema 2. a) Să se arate că

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

pentru orice numere reale a, b, c .

- Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$(f(x))^3 + 6xf(x) + x^3 = 8, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 3. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex și M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, FA .

- Să se arate că cu segmentele MQ, PS și RN se poate construi un triunghi.
- Să se arate că triunghiul cu laturile congruente cu MQ, PS și RN este dreptunghic dacă și numai dacă $MQ \perp PS$ sau $MQ \perp RN$ sau $PS \perp RN$.

Problema 4. Fie $p \geq 3$ un număr prim și $n \geq 3$ un număr natural impar.

- Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{k^n}{p} \right\} = \frac{p-1}{2}.$$

- Să se determine toate numerele naturale impare $N \geq 3$ pentru care

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \frac{k^n}{N} \right\} = \frac{N-1}{2}.$$

(Indicație: $\frac{k^n}{p} + \frac{(p-k)^n}{p} \in \mathbb{N}$).

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Țirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a X – a

Problema 1. Se consideră $n \geq 3$ drepte în plan, care împart planul în $\frac{n(n+1)}{2}$ regiuni. Să se arate că exact una din următoarele afirmații este adevărată:

- 1) Există o singură pereche de drepte paralele.
- 2) Există un singur triplet de drepte concurente.

Problema 2. Fie numerele complexe a, b, c cu proprietatea $|a| = |b| = |c| = 1$ și fie

$$S = |a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2.$$

Să se arate că:

- a) Dacă $S = 3$ atunci $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.
- b) Dacă $S = 4$ atunci $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

Problema 3. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$(f(x) - x)(f(y) - 2) \leq (2x - 1)(y + 1)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie a un număr natural fixat. Să se arate că pentru orice număr natural n există un număr natural $f(n)$ astfel ca

$$(\sqrt{1+a} + \sqrt{a})^n = \sqrt{1+f(n)} + \sqrt{f(n)}$$

și să se determine $f(n)$.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a XI – a

Problema 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrici care au valorile proprii de modul mai mare ca 1.

- Să se arate că dacă $A \cdot B = B \cdot A = C$, atunci matricea C are valorile proprii de modul mai mare ca 1.
- Este condiția $A \cdot B = B \cdot A$ necesară pentru a)?

Problema 2. Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația de recurență:

$$x_0 = a > 0, x_1 = b > 0 \text{ și } x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_{n-1}}, \forall n \geq 1.$$

- Să se determine în ce condiții șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton.
- Să se arate că dacă șirul $(x_n)_n$ este monoton, atunci el este și mărginit.

Problema 3. Fie a, b, c numere reale astfel ca:

$$\sin(a + b) \sin(a - b) + \cos b \cos c = 0 \quad (1)$$

$$\sin(b + c) \sin(b - c) + \cos c \cos a = 0. \quad (2)$$

Să se arate că: $\sin(c + a) \sin(c - a) = \cos a \cos b$.

Problema 4. Se consideră șirul de numere reale $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}$ și șirul de numere complexe $b_n = \cos 4a_n + i \sin 4a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Să se arate că $|b_n - b_m| \in \mathbb{Q}$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.
- Să se arate că în planul xOy există 2014 puncte de coordonate numere întregi, între care distanțele sunt numere naturale.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Tirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a XII – a

Problema 1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și numerele distincte $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că dacă $\det(A + z_k B) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$\det A = \det B = 0.$$

b) Să se arate că dacă $(A + z_k B)^n = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$, atunci $A^n = B^n = 0$.

Problema 2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, x \in [0, 1]$.

a) Să se determine funcția $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$.

b) Să se determine limita $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (1 - f^n(x)), x \in [0, 1]$. (Indicație: Notăm $x = \cos t_x$).

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitiva $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ numere reale cu proprietatea $x_i > y_i, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca:

$$\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(y_i)) = f(c) \sum_{i=1}^n (x_i - y_i).$$

Problema 4. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legile de compoziție

$$x \textcircled{n} y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1} + a^{2n+1}}, x, y \in \mathbb{R},$$

unde a este un număr real fixat și n este un număr natural arbitrar.

a) Să se studieze proprietățile acestor legi (asociativitate, element neutru).

b) Să se studieze proprietățile legii de compoziție definită prin:

$$x * y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \textcircled{n} y, x, y \in \mathbb{R}.$$

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”

Țirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a IX – a

Probléma 1. Egy kör kerületén tekintsünk 7 pontot, melyek fekete illetve piros színűek lehetnek. Transzformáción három egymásutáni pont színének a megváltoztatását értjük (feketéről pirosra, illetve pirosról feketére).

a) Mutassuk meg, hogy transzformációk sorozatával mindig elérhetjük, hogy a pontok előre megadott kiszínezésűek legyenek.

b) Ha a kör kerületén csak 6 pontot tekintünk igaz marad-e az a) állítás?

Probléma 2. a) Mutassuk meg, hogy

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

minden a, b, c valós szám esetén.

b) Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, melyek teljesítik a következő összefüggést:

$$(f(x))^3 + 6xf(x) + x^3 = 8, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Probléma 3. Flegyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög és jelölje M, N, P, Q, R, S az AB, BC, CD, DE, EF, FA oldalak felezőpontját.

a) Mutassuk meg, hogy az MQ, PS és RN szakaszokkal mint oldalakkal szerkeszthető egy háromszög.

b) Mutassuk meg, hogy az a háromszög melynek oldalai kongruensek az MQ, PS és RN szakaszokkal, akkor és csak akkor derékszögű, ha $MQ \perp PS$ vagy $MQ \perp RN$ vagy $PS \perp RN$.

Probléma 4. Legyen $p \geq 3$ egy prímszám és $n \geq 3$ páratlan természetes szám.

a) Mutassuk meg, hogy:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{k^n}{p} \right\} = \frac{p-1}{2}.$$

b) Határozzuk meg az összes $N \geq 3$ páratlan természetes számot, melyre

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \frac{k^n}{N} \right\} = \frac{N-1}{2}.$$

(Útmutatás: $\frac{k^n}{p} + \frac{(p-k)^n}{p} \in \mathbb{N}$).

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Țirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a X – a

Probléma 1. Tekintsünk $n \geq 3$ egyenest a síkban, melyek a síkot $\frac{n(n+1)}{2}$ részre osztják. Mutassuk meg, hogy a következő kijelentések közül pontosan az egyik igaz:

- 1) Az egyenesek között egyetlen párhuzamos egyenespár található.
- 2) Az egyenesek között egyetlen összefutó egyeneshármas található.

Probléma 2. Legyenek a, b, c komplex számok, úgy hogy $|a| = |b| = |c| = 1$ és legyen

$$S = |a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2.$$

Mutassuk meg, hogy:

- a) Ha $S = 3$, akkor $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.
- b) Ha $S = 4$, akkor $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

Probléma 3. Határozzuk meg azt az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti a

$$(f(x) - x)(f(y) - 2) \leq (2x - 1)(y + 1)$$

összefüggést minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Probléma 4. Legyen a egy rögzített természetes szám. Mutassuk meg, hogy minden n természetes szám esetén létezik egy $f(n)$ természetes szám, úgy hogy

$$(\sqrt{1+a} + \sqrt{a})^n = \sqrt{1+f(n)} + \sqrt{f(n)}$$

és határozzuk meg $f(n)$ -t.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a XI – a

Probléma 1. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ olyan mátrixok, melyek sajátértékei 1-nél nagyobb abszolút értékűek.

- Mutassuk meg, hogy ha $A \cdot B = B \cdot A = C$, akkor a C mátrix sajátértékeinek az abszolút értéke nagyobb mint 1.
- Szükséges-e az $A \cdot B = B \cdot A$ feltétel ahhoz, hogy a) fennálljon?

Probléma 2. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozat a következőképpen adott:

$$x_0 = a > 0, x_1 = b > 0 \text{ és } x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_{n-1}}, \forall n \geq 1.$$

- Határozzuk meg milyen feltételek mellett monoton az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat.
- Mutassuk meg, hogy ha az $(x_n)_n$ sorozat monoton, akkor a sorozat egyben korlátos is.

Probléma 3. Tekintsük az a, b, c valós számokat, melyek kielégítik a következő összefüggéseket:

$$\sin(a + b) \sin(a - b) + \cos b \cos c = 0 \quad (1)$$

$$\sin(b + c) \sin(b - c) + \cos c \cos a = 0. \quad (2)$$

Mutassuk meg, hogy: $\sin(c + a) \sin(c - a) = \cos a \cos b$.

Probléma 4. Tekintsük az $a_n = \arctg n$, $n \in \mathbb{N}$ valós és a $b_n = \cos 4a_n + i \sin 4a_n$, $n \in \mathbb{N}$ komplex számsorozatot.

- Mutassuk meg, hogy $|b_n - b_m| \in \mathbb{Q}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$.
- Mutassuk meg, hogy az xOy síkban létezik 2014 egész koordinátájú pont, melyek páronkénti távolsága természetes szám.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!



**Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”**

Tirgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail: office@papiu.ro; web: www.papiu.ro



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014**

CLASA a XII – a

Probléma 1. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrixok és a $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ egymástól páronként különböző számok.

a) Mutassuk meg, hogy ha $\det(A + z_k B) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$, akkor

$$\det A = \det B = 0.$$

b) Mutassuk meg, hogy ha $(A + z_k B)^n = 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$, akkor $A^n = B^n = 0$.

Probléma 2. Tekintsük az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, x \in [0, 1]$ függvényt.

a) Határozzuk meg az $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ függvényt.

b) Számítsuk ki a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n(1 - f^n(x)), x \in [0, 1]$.

(Indikáció: Mutat $x = \cos t_x$).

Probléma 3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy primitíválható függvény és legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvénye. Tekintsük az $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ valós számokat, melyek teljesítik az következő feltételeket: $x_i > y_i, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Mutassuk meg, hogy létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy hogy:

$$\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(y_i)) = f(c) \sum_{i=1}^n (x_i - y_i).$$

Probléma 4. A valós számok halmazán, tekintsük a következő összetevési törvényeket:

$$x \textcircled{n} y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1} + a^{2n+1}}, x, y \in \mathbb{R},$$

ahol a egy rögzített valós szám és n egy tetszőleges természetes szám.

a) Tanulmányozzuk az adott összetevési törvények tulajdonságait (asszociatívitás, semleges elem).

b) Tanulmányozzuk a következő összetevési törvény tulajdonságait:

$$x * y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \textcircled{n} y, x, y \in \mathbb{R}.$$

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!