Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian"
Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"ALEXANDRU PAPIU ILARIAN", Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a IX – a

Problema 1. Pe circumferinţa unui cerc se consideră 7 puncte care sunt colorate fiecare cu roşu sau negru. Prin transformare înţelegem schimbarea culorilor a trei puncte consecutive (din negru în roşu şi din roşu în negru).

a) Să se arate că printr-o succesiune de transformări putem obţine orice colorare dorim.

b) Dacă pe cerc se consideră 6 puncte rămâne afirmaţia a) adevărată?

Problema 2. a) Să se arate că

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

pentru orice numere reale a, b, c.

b) Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$(f(x))^3+6xf(x)+x^3=8,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Problema 3. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex şi M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, FA.

a) Să se arate că cu segmentele MQ, PS şi RN se poate construi un triunghi.

b) Să se arate că triunghiul cu laturile congruente cu MQ, PS şi RN este dreptunghic dacă şi numai dacă $MQ\perp PS$ sau $MQ\perp RN$ sau $PS\perp RN$.

Problema 4. Fie $p\geq 3$ un număr prim şi $n\geq 3$ un număr natural impar.

a) Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{k^n}{p}\right\}=\frac{p-1}{2}.$$

b) Să se determine toate numerele naturale impare $N\geq 3$ pentru care

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left\{\frac{k^n}{N}\right\}=\frac{N-1}{2}.$$

(Indicaţie: $\dfrac{k^n}{p}+\dfrac{(p-k)^n}{p}\in\mathbb{N}$).

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Naţional
„Alexandru Papiu-Ilarian"
Tîrgu-Mureş, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "ALEXANDRU PAPIU ILARIAN", Ediţia a XIX-a 24-25 octombrie 2014

CLASA a X – a

Problema 1. Se consideră $n \geq 3$ drepte în plan, care împart planul în $\frac{n(n+1)}{2}$ regiuni. Să se arate că exact una din următoarele afirmaţii este adevărată:
1) Există o singură pereche de drepte paralele.
2) Există un singur triplet de drepte concurente.

Problema 2. Fie numerele complexe a, b, c cu proprietatea $|a| = |b| = |c| = 1$ şi fie

$$S = |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2.$$

Să se arate că:
a) Dacă $S = 3$ atunci $|a-b| = |b-c| = |c-a|$.
b) Dacă $S = 4$ atunci $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Problema 3. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$(f(x) - x)(f(y) - 2) \leq (2x - 1)(y + 1)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie a un număr natural fixat. Să se arate că pentru orice număr natural n există un număr natural $f(n)$ astfel ca

$$\left(\sqrt{1+a} + \sqrt{a}\right)^n = \sqrt{1 + f(n)} + \sqrt{f(n)}$$

şi să se determine $f(n)$.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian”
Per aspera ad astra!
Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a XI – a

Problema 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrici care au valorile proprii de modul mai mare ca 1.

a) Să se arate că dacă $A \cdot B = B \cdot A = C$, atunci matricea C are valorile proprii de modul mai mare ca 1.

b) Este condiţia $A \cdot B = B \cdot A$ necesară pentru a)?

Problema 2. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_0 = a > 0,\ x_1 = b > 0 \text{ şi } x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_{n-1}},\ \forall\, n \geq 1.$$

a) Să se determine în ce condiţii şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.

b) Să se arate că dacă şirul $(x_n)_n$ este monoton, atunci el este şi mărginit.

Problema 3. Fie a, b, c numere reale astfel ca:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) + \cos b \cos c = 0 \tag{1}$$

$$\sin(b+c)\sin(b-c) + \cos c \cos a = 0. \tag{2}$$

Să se arate că: $\sin(c+a)\sin(c-a) = \cos a \cos b$.

Problema 4. Se consideră şirul de numere reale $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}$ şi şirul de numere complexe $b_n = \cos 4a_n + i \sin 4a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $|b_n - b_m| \in \mathbb{Q}$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că în planul xOy există 2014 puncte de coordonate numere întregi, între care distanţele sunt numere naturale.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian"
' Per aspera ad astra ! '
Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

ROMANIA
MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"ALEXANDRU PAPIU ILARIAN", Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a XII – a

Problema 1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi numerele distincte $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
a) Să se arate că dacă $\det(A + z_k B) = 0$, $\forall\ k = 0, 1, \ldots, n$, atunci

$$\det A = \det B = 0.$$

b) Să se arate că dacă $(A + z_k B)^n = 0$, $\forall\ k = 0, 1, \ldots, n$, atunci $A^n = B^n = 0$.

Problema 2. Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, $x \in [0, 1]$.
a) Să se determine funcţia $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$.
b) Să se determine limita $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - f^n(x))$, $x \in [0, 1]$. (Indicaţie: Notăm $x = \cos t_x$).

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ numere reale cu proprietatea $x_i > y_i$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca:

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(y_i)) = f(c)\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i).$$

Problema 4. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legile de compoziţie

$$x \; ⓝ \; y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1} + a^{2n+1}},\ \ x, y \in \mathbb{R},$$

unde a este un număr real fixat şi n este un număr natural arbitrar.
a) Să se studieze proprietăţile acestor legi (asociativitate, element neutru).
b) Să se studieze proprietăţile legii de compoziţie definită prin:

$$x * y = \lim_{n\to\infty} x \; ⓝ \; y,\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Național
„Alexandru Papiu-Ilarian"
Per aspera ad astra !
Tîrgu-Mureș, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"ALEXANDRU PAPIU ILARIAN", Ediția a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a X – a

Probléma 1. Tekintsünk $n \geq 3$ egyenest a síkban, melyek a síkot $\dfrac{n(n+1)}{2}$ részre osztják. Mutassuk meg, hogy a következő kijelentések közül pontosan az egyik igaz:
1) Az egyenesek között egyetlen párhuzamos egyenespár található.
2) Az egyenesek között egyetlen összefutó egyeneshármas található.

Probléma 2. Legyenek a, b, c komplex számok, úgy hogy $|a| = |b| = |c| = 1$ és legyen

$$S = |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2.$$

Mutassuk meg, hogy:
a) Ha $S = 3$, akkor $|a-b| = |b-c| = |c-a|$.
b) Ha $S = 4$, akkor $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Probléma 3. Határozzuk meg azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti a

$$(f(x) - x)(f(y) - 2) \leq (2x - 1)(y + 1)$$

összefüggést minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Probléma 4. Legyen a egy rögzített természetes szám. Mutassuk meg, hogy minden n természetes szám esetén létezik egy $f(n)$ természetes szám, úgy hogy

$$\left(\sqrt{1+a} + \sqrt{a}\right)^n = \sqrt{1 + f(n)} + \sqrt{f(n)}$$

és határozzuk meg $f(n)$−t.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Naţional
„Alexandru Papiu-Ilarian”
Tîrgu-Mureş, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediţia a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a XI – a

Probléma 1. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ olyan mátrixok, melyek sajátértékei 1-nél nagyobb abszolút értékűek.

a) Mutassuk meg, hogy ha $A \cdot B = B \cdot A = C$, akkor a C mátrix sajátértékeinek az abszolút értéke nagyobb mint 1.

b) Szükséges-e az $A \cdot B = B \cdot A$ feltétel ahoz, hogy a) fennálljon?

Probléma 2. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozat a következőképpen adott:

$$x_0 = a > 0,\ x_1 = b > 0 \text{ és } x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_{n-1}},\ \forall\ n \geq 1.$$

a) Határozzuk meg milyen feltételek mellett monoton az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat.

b) Mutassuk meg, hogy ha az $(x_n)_n$ sorozat monoton, akkor a sorozat egyben korlátos is.

Probléma 3. FTekintsük az a, b, c valós számokat, melyek kielégítik a következő összefüggéseket:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) + \cos b \cos c = 0 \tag{1}$$

$$\sin(b+c)\sin(b-c) + \cos c \cos a = 0. \tag{2}$$

Mutassuk meg, hogy: $\sin(c+a)\sin(c-a) = \cos a \cos b$.

Probléma 4. Tekintsük az $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}$ valós és a $b_n = \cos 4a_n + i \sin 4a_n$, $n \in \mathbb{N}$ komplex számsorozatot.

a) Mutassuk meg, hogy $|b_n - b_m| \in \mathbb{Q}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Mutassuk meg, hogy az xOy síkban létezik 2014 egész koordinátájú pont, melyek páronkénti távolsága természetes szám.

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!

Colegiul Naţional
„Alexandru Papiu-Ilarian”
Per aspera ad astra!
Tîrgu-Mureş, str. Bernady Gyorgy, nr. 12
Tel: 0365-882831, Fax: 0365-882804
e-mail:office@papiu.ro; web: www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”, Ediţia a XIX-a
24-25 octombrie 2014

CLASA a XII – a

Probléma 1. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrixok és a $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ egymástól páronként különböző számok.

a) Mutassuk meg, hogy ha $\det(A + z_k B) = 0$, $\forall\ k = 0, 1, \ldots, n$, akkor

$$\det A = \det B = 0.$$

b) Mutassuk meg, hogy ha $(A + z_k B)^n = 0$, $\forall\ k = 0, 1, \ldots, n$, akkor $A^n = B^n = 0$.

Probléma 2. Tekintsük az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, $x \in [0, 1]$ függvényt.

a) Határozzuk meg az $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$ függvényt.

b) Számítsuk ki a következő határértéket: $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - f^n(x))$, $x \in [0, 1]$.

(Indikáció: Mutat $x = \cos t_x$).

Probléma 3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy primitíválható függvény és legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvénye. Tekintsük az $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ valós számokat, melyek teljesítik az következő feltételeket: $x_i > y_i$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Mutassuk meg, hogy létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy hogy:

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(y_i)) = f(c) \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i).$$

Probléma 4.A valós számok halmazán, tekintsük a következő összetevési törvényeket:

$$x \textcircled{n}\ y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1} + a^{2n+1}},\ x, y \in \mathbb{R},$$

ahol a egy rögzített valós szám és n egy tetszőleges természetes szám.

a) Tanulmányozzuk az adott összetevési törvények tulajdonságait (asszociatívitás, semleges elem).

b) Tanulmányozzuk a következő összetevési törvény tulajdonságait:

$$x * y = \lim_{n\to\infty} x \textcircled{n}\ y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

VĂ URĂM MULT SUCCES!!!