Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a V-a

Subiectul I

a) Scrieți numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.

b) Scrieți numărul 100^{6p+1} ca o sumă de patru cuburi perfecte, unde p este număr natural.

c) Să se arate că $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014 \cdot 2015)^2 > 2015^{2015}$.

Subiectul II

Fie numărul $A = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2012 \cdot 2013 + (2013 \cdot 2014) : 2] :$
$: (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2012^2 + 2013^2)$.

a) Arătați că numărul $B = A + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013}$ este pătrat perfect.

b) Comparați numerele 100^{310} cu B.

Subiectul III

Victor are pe aleea dreaptă din fața casei un pavaj cu pavele în formă de pătrate. Fiecare pavelă este împărțită în 9 pătrate egale, iar pe fiecare pătrățel sunt scrise numere naturale după cum urmează:

1	2	3
8	36	4
7	6	5

pavela 1

9	10	11
16	100	12
15	14	13

pavela 2

pavela 3

....

pavela n

a) Aflați suma tuturor numerelor scrise pe primele 20 de pavele.

b) Care este numărul scris în centrul pavelei de pe locul al 21-lea?

c) Știind că numărul scris în centrul celei de a n-a pavelă din pavaj este 2020, aflați n.

Mult succes!

Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VI-a

Subiectul I

a) Aflați numerele naturale nenule a căror diferență este egală cu câtul lor.

b) Determinați numerele naturale prime *a, b, c* astfel încât numărul

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - 3$$

să fie prim.

Subiectul II

Arătați că numărul $\overline{zxy}$ scris în baza zece este pătrat perfect dacă

$$\frac{xy+1}{xyz+y+z} = \frac{9}{31}.$$

Subiectul III

Pe dreapta *d* se consideră punctele *A*, *O*, *B* cu $O \in (AB)$. Fie semidreptele (*OC* și (*OD* astfel încât m($\sphericalangle COD$) = 70°. Dacă semidreptele (*OM* și (*ON* sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și, respectiv, $\sphericalangle AOC$, determinați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

Mult succes!

Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VII-a

Subiectul I

a) Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ și x pentru care are loc egalitatea:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 2014.$$

b) Arătați că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} \notin \mathbb{N}$.

Subiectul II

a) Dacă $b \in \mathbb{Z}$ și $a \in \mathbb{Q}$, iar inversul numărului $a - b$ este $a + b$, să se arate că $|a| = 1$.

b) Fie șirul de numere naturale 7, 77, 777, 7777, … scrise în baza zece.

Să se arate că printre primii 2011 termeni ai șirului există cel puțin unul divizibil cu 2011.

Subiectul III

Se dă triunghiul ABC cu m($\sphericalangle ACB$) = 30° și m($\sphericalangle BAC$) = 110°. Pe latura (BC) a triunghiului se consideră punctul D astfel încât m($\sphericalangle DAC$) = 50°.

Arătați că $(AB) \equiv (CD)$.

Mult succes!

Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^3 - 3xy + y^3 = 9$.

b) Fie șirul $a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}$, $a_2 = \sqrt{a_1^2 + 1}$, …, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$, … oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a_0 \in \mathbb{N}^*$, a_0 fixat, arătați că șirul conține o infinitate de termeni iraționali.

Subiectul II

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale prime și distincte două câte două ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1420$.

b) Câte soluții are ecuația?

Subiectul III

Se dau trei drepte concurente și necoplanare *a, b, c* care intersectează trei plane paralele

α_1, α_2 și α_3.

a) Să se arate că punctele de intersecție ale dreptelor *a, b, c* cu planele α_1, α_2 și α_3 formează în fiecare plan un triunghi, iar cele trei triunghiuri sunt asemenea.

b) Să se arate că centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri de la **a)** sunt coliniare.

Mult succes!