Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a V-a

Subiectul I

a) Scrieți numărul 100 ca o sumă de patru cuburi perfecte.

b) Scrieți numărul 100^{6p+1} ca o sumă de patru cuburi perfecte, unde p este număr natural.

c) Să se arate că $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2014 \cdot 2015)^2 > 2015^{2015}$.

Barem de corectură și de evaluare

a) $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$. **(2p)**

b) $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ implică $100^{6p} \cdot 100 = 1^3 \cdot 100^{6p} + 2^3 \cdot 100^{6p} + 3^3 \cdot 100^{6p} + 4^3 \cdot 100^{6p}$. **(1p)**

Deci $100^{6p+1} = (1 \cdot 100^{2p})^3 + (2 \cdot 100^{2p})^3 + (3 \cdot 100^{2p})^3 + (4 \cdot 100^{2p})^3$. **(1p)**

c) Avem $(2015!)^2 = (1 \cdot 2015) \cdot (2 \cdot 2014) \cdot (3 \cdot 2013) \cdot ... \cdot (2014 \cdot 2) \cdot (2015 \cdot 1)$. **(1p)**

Însă $(n + 1) \cdot (2015 - n) = 2015n - n^2 + 2015 - n = 2015 + n \cdot (2015 - n - 1) > 2015$, oricare ar fi n natural cu $1 \leq n \leq 2013$. **(1p)**

Deci $(2015!)^2 > 2015^{2015}$. **(1p)**

Subiectul II

Fie numărul $A = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2012 \cdot 2013 + (2013 \cdot 2014) : 2] : (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + $
$+ \ldots + 2012^2 + 2013^2)$.

a) Arătați că numărul $B = A + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013}$ este pătrat perfect.

b) Comparați numerele 100^{310} cu B.

Barem de corectură și de evaluare

a) Avem: $A = [1 \cdot (1 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + 3 \cdot (3 + 1) + \ldots + 2012 \cdot (2012 + 1) + 2013 \cdot 1007] :$
$: (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2012^2 + 2013^2)$. **(1p)**

$A = [(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2012^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 2012) + 2013 \cdot 1007] : (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots +$
$+ \ldots + 2012^2 + 2013^2)$.

$A = [(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2012^2) + (2012 \cdot 2013) : 2 + 2013 \cdot 1007] : (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots +$
$+ \ldots + 2012^2 + 2013^2)$. **(1p)**

$A = [(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2012^2) + 2013(1006 + 1007)] : (1^2 + 2^2 + \ldots + 2012^2 + 2013^2)$. $A = 1$. **(1p)**

$B = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013} = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013} = 2^2 + 2^2 +$
$+ 2^3 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013} = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2012} + 2^{2013} = \ldots = 2^{2013} + 2^{2013} = 2^{2014}$. **(1p)**

Deci $B = 2^{2014} = (2^{1007})^2$ pătrat perfect. **(1p)**

b) Avem $2^{13} = 2^{10} \cdot 8 = 8192 < 100^2$, de unde $(2^{13})^{77} < (100^2)^{77}$. **(1p)**

Deci $2^{1001} < 100^{154}$. Însă $2^6 < 100$ și atunci $2^{1007} < 100^{155}$, de unde $(2^{1007})^2 < (100^{155})^2$, adică $2^{2014} < 100^{310}$. **(1p)**

Subiectul III

Victor are pe aleea dreaptă din fața casei un pavaj cu pavele în formă de pătrate. Fiecare pavelă este împărțită în 9 pătrate egale, iar pe fiecare pătrățel sunt scrise numere naturale după cum urmează:

1	2	3
8	36	4
7	6	5

pavela 1

9	10	11
16	100	12
15	14	13

pavela 2

pavela 3

…….

pavela n

a) Aflați suma tuturor numerelor scrise pe primele 20 de pavele.

b) Care este numărul scris în centrul pavelei de pe locul al 21-lea?

c) Știind că numărul scris în centrul celei de a n-a pavelă din pavaj este 2020, aflați n.

Barem de corectură și de evaluare

a) Pe marginile primelor 20 de pavele din pavaj sunt scrise primele $20 \cdot 8 = 160$ de numere naturale nenule. **(1p)**

Suma lor $= 1 + 2 + \ldots + 160 = (160 \cdot 161) : 2 = 161 \cdot 80 = 12880$. **(1p)**

Suma tuturor numerelor scrise în primele 20 de pavele este egală cu $12880 \cdot 2 = 25760$. **(1p)**

b) $161 + 162 + \ldots + 168 = 160 \cdot 8 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 8) = 1316$. **(2p)**

c) Numerele scrise pe marginea pavelei a n-a sunt: $p + 1, p + 2, \ldots, p + 8$ și avem:

$(p + 1) + (p + 2) + \ldots + (p + 8) = 2020$, de unde $p = 248$. **(1p)**

Deci aceste numere sunt 249, 250, …, 256 și $n = 256 : 8 = 32$. **(1p)**

Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VI-a

Subiectul I

a) Aflați numerele naturale nenule a căror diferență este egală cu câtul lor.

b) Determinați numerele naturale prime *a, b, c* astfel încât numărul $A = a^4 + b^4 + c^4 - 3$ să fie prim.

Barem de corectură și de evaluare

a) Fie $a = bc + r$, $r < b$ și $b \geq 1$.
Cazul $r = 0$ implică $a = bc$ și din $a - b = c$ rezultă $bc - b = c$ sau $b(c - 1) = c$, de unde $c - 1 / c$ sau $c - 1 / (c - 1) + 1$, adică $c - 1 / 1$. Deci $c = 2$, iar $b = 2$ și $a = 4$, soluție. **(1p)**
Cazul $r = 1$ implică $a = bc + 1$, $b \geq 2$. Deci $bc + 1 - b = c$, de unde $b(c - 1) = c - 1$. Dacă $c = 1$, atunci $b \in \mathbb{N}^*$ cu $b \geq 2$, iar $a = b + 1$, soluție. **(1p)**
Cazul $r \geq 2$ implică $a - b = \dfrac{a-r}{b}$ sau $ab - b^2 = a - r$ sau $a(b - 1) = b^2 - r = b^2 - 1 - r + 1 =$
$= (b^2 - 1) - (r - 1)$, de unde $b - 1 / r - 1$, absurd pentru că $b - 1 > r - 1$. **(1p)**
Prin urmare, $(a, b) \in \{(4, 2), (k + 1, k)\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$. **(1p)**
b) Dacă $a = b = c = 2$, atunci $A = 45$, nu convine.
Fără a diminua generalitatea, putem presupune că $a \leq b \leq c$.
Numerele *a*, *b*, *c* nu pot fi simultan impare pentru că ar rezulta A = par și $A > 2$. **(1p)**
Deci $a = 2$ și determinăm *b* și *c* prime astfel încât numărul $A = b^4 + c^4 + 13$ să fie prim.
Dacă $b = 2$, atunci A = par pentru că c^4 este impar, nu convine.
Dacă $b = 3$, pentru $c = 5$ se obține soluția $A = 719$, soluție. **(1p)**
Pentru $c \neq 5$ se obține $5 / A$ și $A > 5$, nu convine.
Dacă $b \geq 5$, atunci $3 / A$ și cum $A > 3$, nu convine.
Prin urmare, $(a, b, c) \in \{(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)\}$. **(1p)**

Subiectul II

Arătați că numărul $\overline{zxy}$ scris în baza zece este pătrat perfect dacă $\dfrac{xy+1}{xyz+y+z} = \dfrac{9}{31}$.

Barem de corectură și de evaluare

$x = 0$ conduce la $\dfrac{1}{y+z} = \dfrac{9}{31}$, de unde $y + z = \dfrac{31}{9} \notin \mathbb{N}$.

$y = 0$ conduce la $\dfrac{1}{z} = \dfrac{9}{31}$, de unde $31 = 9z$ și $9 / 31$, nu convine. **(1p)**

Ecuația din enunț este echivalentă cu $\dfrac{xyz+y+z}{xy+1} = \dfrac{31}{9}$ sau $\dfrac{z(xy+1)+y}{xy+1} = \dfrac{31}{9}$ sau $z + \dfrac{y}{xy+1} =$
$= 3 + \dfrac{4}{9}$, **(1)**. **(1p)**

Însă $x, y \in \mathbb{N}^*$ implică $y < xy + 1 \Leftrightarrow y(x - 1) + 1 > 0$, evident. Deci $0 < \dfrac{y}{xy+1} < 1$ și din **(1)** rezultă $z = 3$ și $\dfrac{y}{xy+1} = \dfrac{4}{9}$ sau $9y = 4xy + 4$, de unde $y / 4$, adică $y \in \{1, 2, 4\}$. **(2p)**

$y = 1$ conduce la $9 = 4x + 4$, de unde $4 / 9$, nu convine.
$y = 2$ conduce la $18 = 8x + 4$, de unde $2 / 9$, nu convine. **(1p)**
$y = 4$ conduce la $36 = 16x + 4$, de unde $x = 2$. **(1p)**
Prin urmare, $\overline{zxy} = 324 = 18^2$. **(1p)**

Subiectul III

Pe dreapta d se consideră punctele A, O, B cu $O \in (AB)$. Fie semidreptele $(OC$ și $(OD$ astfel încât $m(\sphericalangle COD) = 70°$. Dacă semidreptele $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și, respectiv, $\sphericalangle AOC$, determinați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

Barem de corectură și de evaluare

Cazul I. Semidreptele $(OC$ și $(OD$ sunt situate de aceeași parte a dreptei d.

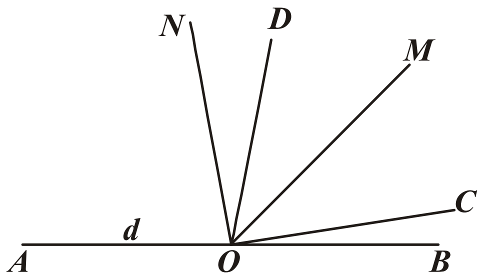
i) $(OC \subset \mathrm{Int}\sphericalangle BOD$.

$$m(\sphericalangle MON) = 180° - [m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle AON)] = 180° - \left[\frac{m(\sphericalangle BOD)}{2} + \frac{m(\sphericalangle AOC)}{2}\right] = 180° -$$

$$-\left[\frac{m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD)}{2} + \frac{m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle COD)}{2}\right] =$$

$$= 180° - \left[\frac{m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle AOD)}{2} + 70°\right] =$$

$$= 180° - \left[\frac{180° - m(\sphericalangle COD)}{2} + 70°\right] = 55°.$$ **(2p)**

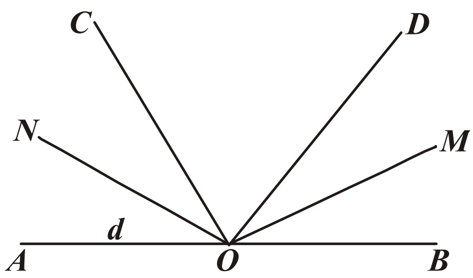


ii) $(OD \subset \mathrm{Int}\sphericalangle BOC$.

$$m(\sphericalangle MON) = 180° - [m(\sphericalangle BOM) + m(\sphericalangle AON)] =$$

$$= 180° - \frac{m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOC)}{2} =$$

$$= 180° - \frac{180° - m(\sphericalangle COD)}{2} = 125°.$$ **(2p)**



Cazul II. Semidreptele $(OC$ și $(OD$ sunt situate de o parte și de alta a dreptei d.

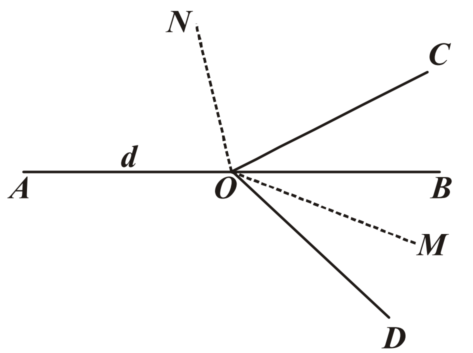
j) $(OB \subset \mathrm{Int}\sphericalangle COD$.

$$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle MOB) =$$

$$= \frac{m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle BOD)}{2} =$$

$$= \frac{180° + [m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle BOD)]}{2} = \frac{180° + m(\sphericalangle COD)}{2} =$$

$$= 125°.$$ **(1p)**



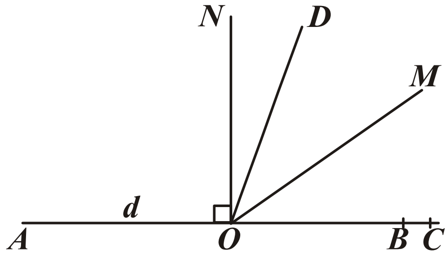
jj) Cazul $(OA \subset \mathrm{Int}\sphericalangle COD$ se analizează la fel și se obține $m(\sphericalangle MON) = 125°$. **(1p)**

Cazul III

k) $(OB \equiv (OC$

$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle NOC) - m(\sphericalangle MOC) =$

$$= 90° - \frac{m(\sphericalangle COD)}{2} = 55°.$$

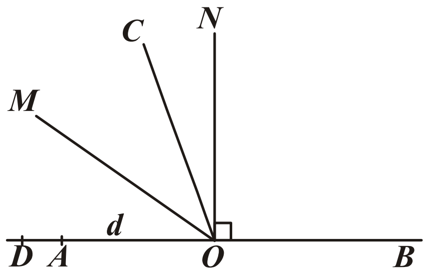


kk) $(OA \equiv (OD$

$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOA) - m(\sphericalangle AON) =$

$$= 90° - \frac{m(\sphericalangle COD)}{2} = 55°.$$

(1p)



Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“, Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VII-a

Subiectul I

a) Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ și x pentru care are loc egalitatea: $x^3 + ax^2 + bx + c = 2014$.

b) Arătați că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} \notin \mathbb{N}$.

Barem de corectură și de evaluare

a) $x \leq 10$ implică $x^3 + ax^2 + bx + c \leq 1000 + 900 + 90 + 9 = 1999$, nu convine. **(1p)**

$x = 11$ implică $121a + 11b + c = 2014 - 1331 = 683$, **(1)**, de unde $11 \,/\, 683 - c$, adică $11 \,/\, (62 \cdot 11 + 1) - c$. Deci $11 \,/\, c - 1$, de unde $c = 1$.

Dacă $c = 1$ din **(1)** se obține $121a + 11b = 682$ sau $11a + b = 62$, **(2)**. Cum $b \leq 9$ din **(2)** rezultă $a = 5$ și $b = 7$, <u>soluție</u>. **(2p)**

$x = 12$ implică $144a + 12b + c = 286 = 12 \cdot 23 + 10$, de unde $12 \,/\, 10 - c$ și $c = 10$, nu convine.

$x \geq 13$ conduce la $x^3 + ax^2 + bx + c \geq 13^3 = 2197$, nu convine.

Prin urmare, $\overline{abc} = 571$. **(1p)**

Avem: $m = {}^{2014!)}1 + {}^{\frac{2014!}{2})}\frac{1}{2} + {}^{\frac{2014!}{3})}\frac{1}{3} + \ldots + {}^{\frac{2014!}{2010})}\frac{1}{2010} + {}^{\frac{2014!}{2011})}\frac{1}{2011} + {}^{\frac{2014!}{2012})}\frac{1}{2012} + {}^{\frac{2014!}{2013})}\frac{1}{2013} +$

$+ {}^{\frac{2014!}{2014})}\frac{1}{2014} = \dfrac{2014! + \frac{2014!}{2} + \frac{2014!}{3} + \ldots + \frac{2014!}{2010} + \frac{2014!}{2011} + \frac{2014!}{2012} + \frac{2014!}{2013} + \frac{2014!}{2014}}{2014!} =$

$= \dfrac{\mathcal{M}_{2011} + \mathcal{M}_{2011} + \ldots + \mathcal{M}_{2011} + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 + \mathcal{M}_{2011} + \mathcal{M}_{2011} + \mathcal{M}_{2011}}{2014!} =$

$= \dfrac{\mathcal{M}_{2011} + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014}{\mathcal{M}_{2011}} = \dfrac{a}{b}$. **(2p)**

Însă $2011 \nmid 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014$ pentru că 2011 este prim.

Prin urmare, fracția $\frac{a}{b}$ este zecimală periodică, iar $m \notin \mathbb{N}$. **(1p)**

Subiectul II

a) Dacă $b \in \mathbb{Z}$ și $a \in \mathbb{Q}$, iar inversul numărului $a - b$ este $a + b$, să se arate că $|a| = 1$.

b) Fie șirul de numere naturale 7, 77, 777, 7777, … scrise în baza zece.

Să se arate că printre primii 2011 termeni ai șirului există cel puțin unul divizibil cu 2011.

Barem de corectură și de evaluare

a) Avem $(a - b)(a + b) = 1 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 1$, $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Z}$. Dar $a \in \mathbb{Q}$ și $a^2 \in \mathbb{Z}$ implică $a \in \mathbb{Z}$. **(1p)**

Din $(a - b)(a + b) = 1$ și $a, b \in \mathbb{Z}$ rezultă $a \in \{-1; 1\}$, adică $|a| = 1$. **(1p)**

b) Din primele 2011 numere din șirul $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$ vor exista cel puțin două numere care vor da același rest la împărțirea cu 2011 pentru că $(10, 2011) = 1$. **(2p)**

Fie acestea 10^a și 10^b cu $a > b$.

Din $2011 / 10^a - 10^b$ rezultă $2011 / 10^b \cdot (10^{a-b} - 1)$, adică $2011 / 10^b \cdot \underbrace{999...9}_{(a-b)\text{ cifre}}$. **(1p)**

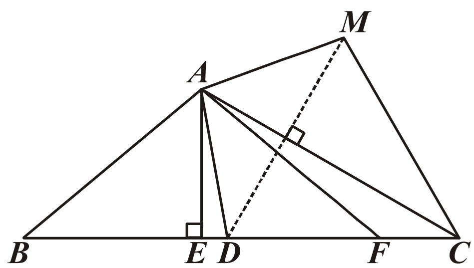
Însă $(2011, 10) = 1$ și $(2011, 9) = 1$ rezultă că $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$. **(1p)**

Din $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$ și $(7, 2011) = 1$ rezultă că $2011 / \underbrace{77...7}_{(a-b)\text{ cifre}}$. **(1p)**

Subiectul III

Se dă triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle ACB) = 30°$ și $m(\sphericalangle BAC) = 110°$. Pe latura (BC) a triunghiului se consideră punctul D astfel încât $m(\sphericalangle DAC) = 50°$. Arătați că $(AB) \equiv (CD)$.

Barem de corectură și de evaluare



Fie $AE \perp BC$, $E \in BC$ și punctul F simetricul punctului B față de punctul E. Rezultă că ΔABF este isoscel cu $(AB) \equiv (AF)$. **(1p)**

Deci $m(\sphericalangle AFB) = 40°$ și $m(\sphericalangle FAC) = 10°$, iar $m(\sphericalangle DAF) = 40°$, de unde ΔADF este isoscel, adică $(AD) \equiv (DF)$. **(1p)**

Acum, fie punctul M simetricul punctului D față de dreapta AC. $m(\sphericalangle ADM) = 40°$ și $m(\sphericalangle MDC) = m(\sphericalangle DCM) = 60°$. Urmează că ΔDMC este echilateral, de unde $(DM) \equiv (CD)$. **(2p)**

$\Delta MAD \equiv \Delta ADF$ (L.U.L.), de unde $(MD) \equiv (AF)$. **(2p)**

Din $(AB) \equiv (AF)$ și $(AF) \equiv (MD) \equiv (CD)$ rezultă că $(AB) \equiv (CD)$. **(1p)**

Concursul interjudeţean „Matematica, de drag“,
Ediţia a IX-a, Bistriţa, 21-23 noiembrie 2014

Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^3 - 3xy + y^3 = 9$.

b) Fie șirul $a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}$, $a_2 = \sqrt{a_1^2 + 1}$, …, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$, … oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $a_0 \in \mathbb{N}^*$, a_0 fixat, arătați că șirul conține o infinitate de termeni iraționali.

Barem de corectură și de evaluare

a) Dacă $x = 3m$, $y = 3n$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$, atunci 27 / 9, nu convine. **(1p)**

Dacă $x = 3m$ și $y = 3n + 1$ sau $x = 3m + 1$ și $y = 3n$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$, atunci avem $\mathcal{M}_3 + 1 = 9$, nu convine. **(1p)**

Dacă $x = 3m$ și $y = 3n + 2$ sau $x = 3m + 2$ și $y = 3n$, atunci obținem $\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_3 + 2 = 9$, nu convine. **(1p)**

Dacă $x = 3m + 2$ și $y = 3n + 2$, atunci $x^3 - 3xy + y^3 = \mathcal{M}_3 + 1 = 9$, nu convine. **(1p)**

Prin urmare, ecuația din enunț nu are soluții în $\mathbb{Z}$. **(1p)**

b) Se observă că $a_2 = \sqrt{a_0^2 + 2}$, $a_3 = \sqrt{a_0^2 + 3}$, …, $a_n = \sqrt{a_0^2 + n}$, … . **(1p)**

Dacă $n = a_0^2$, atunci $a_n = a_0\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Dacă $n = 2a_0^2$, atunci $a_{k-1} = a_0\sqrt{3} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Dacă $n = (k - 1)a_0^2$, unde $k \neq p^2$, $p \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_n = a_0\sqrt{k} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Deci șirul dat este infinit. **(1p)**

Subiectul II

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale prime și distincte două câte două ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1420.$$

b) Câte soluții are ecuația?

Barem de corectură și de evaluare

Fără a diminua generalitatea putem presupune $x < y < z < t$.

Dacă $x = 2$, cum y, z și t sunt numere impare, relația $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1420$, **(1)**, nu este satisfăcută. **(1p)**

Dacă $x = 3$, din **(1)** rezultă $y^2 + z^2 + t^2 = 1411 = \mathcal{M}_3 + 1$, însă $y^2 + z^2 + t^2 = \mathcal{M}_3$, nu convine. **(1p)**

Dacă $x = 5$, din **(1)** rezultă $y^2 + z^2 + t^2 = 1395$. Însă resturile împărțirii sumei $y^2 + z^2 + t^2$ la 5 sunt 1, 2, 3 sau 4, nu convine.

Dacă $x = 7$, din **(1)** rezultă $y^2 + z^2 + t^2 = 1371$, **(2)**.

Dacă $y = 11$, din **(2)** rezultă $z^2 + t^2 = 1250$, **(3)**.

Dacă $z = 13$, din **(3)** rezultă $t^2 = 1081$, nu convine.

Dacă $z = 17$, din **(3)** rezultă $t^2 = 961$, de unde $t = 31$, <u>soluție</u>. **(1p)**

Dacă $z = 19$, din **(3)** rezultă $t^2 = 889$, nu convine.

Dacă $z \geq 23$, din **(3)** rezultă $t < 29$, nu convine.

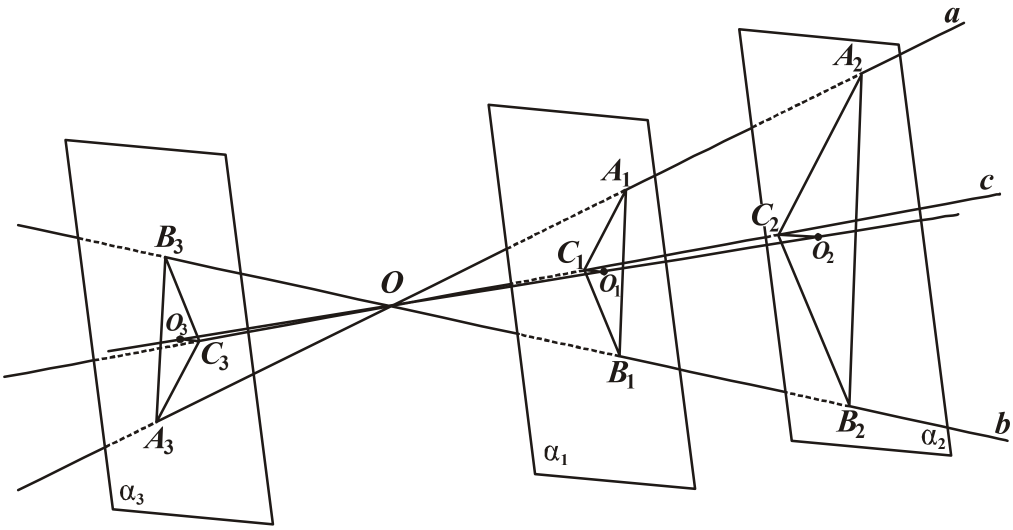
Dacă $y = 13$, din **(2)** rezultă $z^2 + t^2 = 1202$, **(4)**.

Dacă $z = 17$, din **(4)** rezultă $t^2 = 913$, nu convine.

Dacă $z = 19$, din **(4)** rezultă $t^2 = 841$, de unde $d = 29$, soluție.
Dacă $z = 23$, din **(4)** rezultă $t < 23$, nu convine.
Dacă $y = 17$, din **(2)** se obține $z^2 + t^2 = 1082$, de unde pentru $z \geq 19$ se obțin contradicții.
Dacă $y = 19$, atunci $7^2 + 19^2 + z^2 + t^2 > 1420$. **(1p)**
Dacă $x = 11$, din **(1)** rezultă $y^2 + z^2 + t^2 = 1299$, **(4)**.
Dacă $y = 13$, din **(4)** rezultă $z^2 + t^2 = 1130$, **(5)**.
Dacă $z = 17$, din **(5)** rezultă $t^2 = 841$, adică $t = 29$, soluție.
Dacă $z = 19$, atunci $t^2 = 769$, nu convine.
Dacă $z \geq 23$, atunci $z^2 + t^2 > 1130$, contradicție! **(1p)**
Dacă $x = 13$, din **(1)** se obține $y^2 + z^2 + t^2 = 1251$, **(6)**.
Dacă $y \geq 17$, din **(6)** se obțin contradicții. În sfârșit, dacă $x \geq 17$, atunci $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 1420$, fals. Prin urmare, soluțiile ecuației din enunț se obțin prin permutări circulare din cvartetele de numere naturale prime și distincte: (7, 11, 17, 31), (7, 13, 19, 29), (11, 13, 17, 29). **(1p)**
b) În total ecuația are 24 + 24 + 24 = 72 de soluții. **(1p)**

Subiectul III

Se dau trei drepte concurente și necoplanare *a, b, c* care intersectează trei plane paralele α_1, α_2 și α_3.
a) Să se arate că punctele de intersecție ale dreptelor *a, b, c* cu planele α_1, α_2 și α_3 formează în fiecare plan un triunghi, iar cele trei triunghiuri sunt asemenea.
b) Să se arate că centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri de la **a)** sunt coliniare.



Barem de corectură și de evaluare

a) Fie O_1, O_2 și O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ și, respectiv, $\Delta A_3B_3C_3$, iar $a \cap b \cap c = \{O\}$ și $a \cap \alpha_i = \{A_i\}$, $b \cap \alpha_i = \{B_i\}$ și $c \cap \alpha_i = \{C_i\}$, $i = \overline{1,3}$.
Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(a, c) \cap \alpha_1 = A_1C_1$, $(a, c) \cap \alpha_2 = A_2C_2$ rezultă că $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, de unde $\Delta OA_1C_1 \sim$ $\sim \Delta OA_2C_2$ (**t.f.a.**). Deci $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OC_1}{OC_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$, **(1)**. **(1p)**
Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(b, c) \cap \alpha_1 = B_1C_1$, $(b, c) \cap \alpha_2 = B_2C_2$ rezultă că $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, de unde $\Delta OB_1C_1 \sim$ $\sim \Delta OB_2C_2$ (**t.f.a.**). Deci $\dfrac{OC_1}{OC_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$, **(2)**.

Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(a, b) \cap \alpha_1 = A_1B_1$, $(a, b) \cap \alpha_2 = A_2B_2$ rezultă că $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, de unde $\Delta OA_1B_1 \sim$ $\sim \Delta OA_2B_2$ (**t.f.a.**). Deci $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$, **(3)**. **(1p)**

Din **(1)**, **(2)** și **(3)** rezultă că $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_1C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$. Deci $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ (ℓ.ℓ.ℓ.). **(1p)**

Arătați analog că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3$. **(1p)**

b) Presupunem că punctele O_1, O_2, O_3 nu sunt coliniare.
Fie $OO_1 \cap \alpha_2 = \{O_2'\}$. Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(OO_1A_1) \cap \alpha_2 = O_2'A_2$ rezultă că $O_1A_1 \parallel O_2'A_2$. Deci $\Delta OO_1A_1 \sim \Delta OO_2'A_2$ (**t.f.a.**), de unde $\frac{OO_1}{OO_2'} = \frac{O_1A_1}{O_2'A_2}$, **(1)**.

Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(OO_1C_1) \cap \alpha_2 = O_2'C_2$ rezultă că $O_1C_1 \parallel O_2'C_2$. Deci $\Delta OO_1C_1 \sim \Delta OO_2'C_2$ (**t.f.a.**), de unde $\frac{OO_1}{OO_2'} = \frac{O_1C_1}{O_2'C_2}$, **(2)**. **(1p)**

Din $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ și $(OO_1B_1) \cap \alpha_2 = O_2'B_2$ rezultă că $O_1B_1 \parallel O_2'B_2$. Deci $\Delta OO_1B_1 \sim \Delta OO_2'B_2$ (**t.f.a.**), de unde $\frac{OO_1}{OO_2'} = \frac{O_1B_1}{O_2'B_2}$, **(3)**.

Din **(1)**, **(2)** și **(3)** rezultă $\frac{O_1A_1}{O_2'A_2} = \frac{O_1C_1}{O_2'C_2} = \frac{O_1B_1}{O_2'B_2}$.

Însă, $(O_1A_1) \equiv (O_1C_1) \equiv (O_1B_1)$, deci $(O_2'A_2) = (O_2'C_2) = (O_2'B_2)$ și $O_2' = O_2$. Deci punctele O, O_1 și O_2 sunt coliniare. **(1p)**
Arătați analog că și punctele O, O_1 și O_2 sunt coliniare. **(1p)**

Notă: Dacă analizați complet numai cazul în care planele α_2, α_2 și α_3 sunt situate de aceeași parte a punctului O obțineți același punctaj.