OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a V-a

Problema 1. Fie x şi y două numere naturale nenule astfel încât $2015^x - 2013 = x + y$.
Verificaţi dacă y este pătrat perfect, ştiind că:

$$3x + 6x + 9x + ... + 102x = 3570.$$

Graţiela Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$3x \cdot (1+2+...+34) = 3570$ .... (1p)

$x = 2$ .... (2p)

$y = 2014 \cdot 2015$ .... (2p)

Justificarea faptului că y nu este pătrat perfect ($2014^2 < y < 2015^2$ sau alt mod) .... (2p)

Problema 2. Un număr natural de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100, iar diferenţa dintre cifra sutelor şi cifra unităţilor numărului este egală cu 4. Aflaţi numărul.

Mihai Ilie, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$\overline{abc} = 2 \cdot \overline{cba} + 100$ .... (2p)

$98a = 10b + 199c + 100$ .... (1p)

$a = c + 4 \Rightarrow 10b + 101c = 292$ .... (2p)

$b = 9,\ c = 2 \Rightarrow\ \overline{abc} = 692$ .... (2p)

Problema 3. Fie A un număr natural care nu se divide cu 5 şi B câtul împărţirii lui A la 5. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a lui A. Arătaţi că dacă $u(A) < 5$ atunci B este număr par, iar dacă $u(A) > 5$, atunci B este număr impar.

Ion Voicu, Gazeta Matematică nr. 10/2014

Soluţie şi barem de corectare

Fie k câtul împărţirii lui A la 10; atunci $A = 10k + u(A)$ .... (2p)

Notând cu r restul împărţirii lui A la 5, rezultă $A = 5B + r$, $r \in \{1,2,3,4\}$ .... (1p)

Dacă $u(A) < 5$, atunci restul împărţirii lui A la 5 este $u(A)$, deci $5B + u(A) = 10k + u(A)$, de unde rezultă că $B = 2k$, adică B este par .... (2p)

Dacă $u(A) > 5$, atunci restul împărţirii lui A la 5 este $u(A) - 5$, deci $5B + u(A) - 5 = 10k + u(A)$, de unde rezultă că $B = 2k + 1$, adică B este impar .... (2p)

Problema 4. Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se aşază biscuiţi de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm şi lăţimea de 2 cm, fără a depăşi marginile farfuriei. Biscuiţii vin în pachete de câte 15 bucăţi.

a) Arătaţi că oricum am aşeza biscuiţii din 5 pachete, aceştia nu pot acoperi complet farfuria.

b) Arătaţi că dacă pe farfurie se pun biscuiţii din 16 pachete, există cel puţin 4 biscuiţi care se suprapun (nu neapărat complet).

Marius Perianu,Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) Aria farfuriei este de $25\times 25=625\ \text{cm}^2$ .... (1p)

Dacă nu se suprapun, biscuiţii dintr-un pachet acoperă $15\times 2\times 4=120\ \text{cm}^2$ .... (1p)

Rezultă că biscuiţii din 5 pachete acoperă cel mult 600 cm^2, deci nu acoperă complet farfuria .... (1p)

b) Biscuiţii din 16 pachete acoperă o suprafaţă de 1920 cm^2 .... (2p)

Aşezând biscuiţii pe cel mult 3 „straturi”, aceştia ar trebui să acopere de cel mult trei ori suprafaţa farfuriei, adică $3\times 625=1875\,\text{cm}^2<1920\,\text{cm}^2$, deci există cel puţin 4 biscuiţi care se suprapun .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele *a, b, c, d* ştiind că $\frac{\overline{abcd}}{8625}=\overline{1,0a6}$.

Costel Anghel, Gazeta Matematică nr. 9/2014

Soluţie şi barem de corectare

Din enunţ rezultă $8\cdot\overline{abcd}=69\cdot\overline{10a6}$ .... (3p)

$8|\overline{10a6}\Rightarrow a\in\{1,5,9\}$ .... (1p)

Pentru $a=1$ rezultă $\overline{abcd}=8763$, deci *a* este simultan 1 şi 8, absurd .... (1p)

Pentru $a=5$ rezultă $\overline{abcd}=9108$, deci *a* este simultan 5 şi 9, absurd .... (1p)

Pentru $a=9$ rezultă $\overline{abcd}=9453$, care convine, deci $a=9$, $b=4$, $c=5$, $d=3$ .... (1p)

Problema 2. Împărţind numărul natural nenul *m* pe rând la 7, 8 şi 9 obţinem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărţind numărul natural nenul *n* pe rând la 8 şi 9 obţinem resturile 5, respectiv 7.

Arătaţi că fracţia $\frac{m+20}{n+11}$ este reductibilă cu 72.

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$m=7c_1+1$, $m=8c_2+4$, $m=9c_3+7$, unde $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{N}$ .... (1p)

$7|m+20$, $8|m+20$, $9|m+20$ .... (1p)

$[7,8,9]|m+20\Rightarrow 504|m+20$, deci numărătorul se divide cu 72 .... (1p)

$n=8d_1+5$, $n=9d_2+7$, unde $d_1,d_2\in\mathbb{N}$ .... (1p)

$8|n+11$, $9|n+11$ .... (1p)

$[8,9]|n+11\Rightarrow 72|n+11$, deci şi numărătorul se divide cu 72 .... (1p)

Ca urmare, fracţia $\frac{m+20}{n+11}$ este reductibilă cu 72 .... (1p)

Problema 3. Arătaţi că numărul $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{2039}$ este divizibil cu 2015.

Daniel Cojocaru, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

Cum $2015=5\cdot13\cdot31$, vom arăta că *A* este divizibil cu fiecare din numerele 5, 13, 31 .... (1p)

Cum *A* are 2040 de termeni, ei se pot grupa câte 4, deoarece $4|2040$; rezultă

$$A=(1+2+2^2+2^3)+2^4(1+2+2^2+2^3)+...+2^{2036}(1+2+2^2+2^3)$$

şi, cum $1+2+2^2+2^3=15=5\cdot3$, rezultă că $5|A$ .... (2p)

Grupând termenii câte 5 (este posibil, deoarece $5|2040$), rezultă

$$A=(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5(1+2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2035}(1+2+2^2+2^3+2^4)$$

şi, cum $1+2+2^2+2^3+2^4=31$, rezultă că $31|A$ .... (2p)

Grupând termenii câte 12 (la fel, este posibil, deoarece $12 | 2040$) , rezultă

$$A=(1+2+2^2+...+2^{11})+2^{12}(1+2+2^2+...+2^{11})+...+2^{2028}(1+2+2^2+...+2^{11})$$

şi, cum $1+2+2^2+...+2^{11}=4095=13\cdot 315$, rezultă că $31 | A$ .... (2p)

Problema 4. Se consideră punctele coliniare $M_1, M_2, M_3, ..., M_{2015}$ în această ordine, astfel încât $M_1M_2=2$ cm, $M_2M_3=2M_1M_2$, $M_3M_4=2M_2M_3$, …, $M_{2014}M_{2015}=2M_{2013}M_{2014}$.

a) Calculaţi lungimea segmentului $[M_1M_{200}]$.

b) Comparaţi lungimile segmentelor $[M_1M_{200}]$ şi $[M_{200}M_{300}]$.

c) Demonstraţi că pentru orice numere naturale *a, b, c, d,* cu $1\le a<b\le c<d\le 2015$, segmentele $[M_aM_b]$ şi $[M_cM_d]$ au lungimi diferite.

Dorin Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $M_2M_3=2^2$, $M_3M_4=2^3$, $M_{2014}M_{2015}=2^{2014}$ .... (1p)

$M_1M_{200}=2^{100}-2$ .... (1p)

b) $M_{200}M_{300}=2^{300}-2^{200}$ .... (1p)

$2^{200}-2<2^{300}-2^{200}\Rightarrow M_1M_{200}<M_{200}M_{300}$ .... (1p)

c) Presupunând că există numerele naturale *a, b, c, d,* cu $1\le a<b\le c<d\le 2015$ astfel încât

$M_aM_b=M_cM_d$, rezultă $2^b-2^a=2^d-2^c$ .... (1p)

Împărţind prin 2^a rezultă $2^{b-a}-1=2^{d-a}-2^{c-a}$, imposibil, deoarece membrul stâng este un număr impar, iar membrul drept este număr par, deci presupunerea făcută este falsă .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VII-a

Problema 1. Se consideră pătratul *ABCD* în care se notează cu *M* mijlocul laturii [*AB*]. Fie *E* punctul de intersecţie al dreptelor *BD* şi *CM*. Arătaţi că $DM \perp AE$.

Graţiela Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

E este centrul de greutate al triunghiului *ABC* .... (2p)
Notând $\{N\} = AE \cap BC$, rezultă că *N* este mijlocul lui [*BC*] .... (2p)
$\Delta BAN \equiv \Delta ADM \Rightarrow \sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ADM$ .... (2p)
Cum $m(\sphericalangle ADM) + m(\sphericalangle DAE) = 90°$, rezultă că $DM \perp AE$ .... (1p)

Problema 2. **a)** Arătaţi că oricare ar fi numerele reale *a*, *b*, *c* are loc relaţia $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$.
b) Demonstraţi că pentru orice număr real *x* are loc inegalitatea:

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geq 1007^2.$$

Liliana Puţ, Gazeta Matematică nr. 11/2014

Soluţie şi barem de corectare

a) Se ştie că $|x+y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ .... (1p)
Atunci $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$, de unde, pentru $x = a+b,\ y = a+c$, se obţine relaţia $|a+b| + |a+c| \geq |b-c|$ din enunţ .... (2p)
b) Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 1007\}$, conform relaţiei de la **a)**, rezultă $|x+k| + |x+k+1007| \geq 1007$ .... (2p)
Adunând aceste relaţii pentru $k \in \{1, 2, ..., 1007\}$ se obţine inegalitatea din enunţ .... (2p)

Problema 3. Se consideră numărul natural $n = \overline{abcd}$ şi $x = \sqrt{\overline{ab},(\overline{cd}) + \overline{bc},(\overline{da}) + \overline{cd},(\overline{ab}) + \overline{da},(\overline{bc})}$, unde *a*, *b*, *c*, *d* sunt cifre nenule.
a) Ştiind că *x* este raţional, determinaţi cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua *n*.
b) Arătaţi că dacă *x* este număr natural, atunci *n* are cel puţin două cifre egale.

Marius Perianu, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $\overline{ab},(\overline{cd}) + \overline{bc},(\overline{da}) + \overline{cd},(\overline{ab}) + \overline{da},(\overline{bc}) = \dfrac{100(a+b+c+d)}{9}$ .... (3p)
Atunci $x = \dfrac{10}{3} \cdot \sqrt{a+b+c+d}$, deci *x* este raţional dacă şi numai dacă $a+b+c+d$ este pătrat perfect ... (1p)
Dintre cifrele *a*, *b*, *c*, *d*, cel mult una poate fi egală cu 9, deci $a+b+c+d \in \{4, 9, 16, 25\}$, iar valoarea maximă a lui *n* se obţine pentru $a+b+c+d = 25$ şi este 9871 .... (1p)
b) Dacă *x* este natural, atunci $a+b+c+d = 9$ .... (1p)
Presupunând că *a*, *b*, *c*, *d* sunt diferite, ar rezulta că $a+b+c+d \geq 1+2+3+4 = 10$, absurd .... (1p)

Problema 4. Fie triunghiul ABC şi punctele $D, E, F \in (BC)$ astfel încât $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, $[AE$ este bisectoarea unghiului BAD şi $[AF$ este bisectoarea unghiului CAD. Arătaţi că:

$$AE \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right).$$

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$(AE$ este bisectoare în $\Delta ABD \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{EB+ED}{ED} = \frac{AB+AD}{AD} \Rightarrow ED = \frac{AD \cdot BD}{AB+AD}$ .... (2p)

Analog, $(AF$ este bisectoare în ΔACD, de unde $FD = \frac{AD \cdot CD}{AC+AD}$ .... (1p)

Aplicând acum teorema bisectoarei în triunghiul AEF, rezultă $\frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{DB}{DC}$ .... (2p)

Cum $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, rezultă:

$\frac{AE}{AF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}}$, de unde $AE \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right)$ .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VIII-a

Problema 1. **a)** Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z, t are loc egalitatea:

$$(xz+yt)^2+(xt-yz)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2)$$

b) Numerele raţionale pozitive *a, b, c, d* verifică simultan egalităţile:

$$a^2+b^2=9, \qquad c^2+d^2=16, \qquad ac+bd=12.$$

Arătaţi că numărul $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c\sqrt{3}+d}$ este raţional.

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) Verificare directă .... (2p)

b) Din relaţia de la **a)** rezultă $(ad-bc)^2=0$, de unde $ad=bc$ sau $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ .... (2p)

Atunci $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c\sqrt{3}+d}=\dfrac{b\left(\dfrac{a}{b}\cdot\sqrt{3}+1\right)}{d\left(\dfrac{c}{d}\cdot\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{b}{d}$, care este număr raţional .... (3p)

Problema 2. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia:

$$2x^2+2y^2-3x-3y+2=0.$$

Constantin Apostol, Gazeta Matematică nr. 9/2014

Soluţie şi barem de corectare

Înmulţind cu 2, egalitatea din enunţ se scrie echivalent $(x-3)^2+(y-3)^2+3x^2+3y^2=14$ .... (3p)

Atunci $3x^2\le 14$, de unde $|x|\le 2$, adică $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ .... (2p)

Verificând fiecare caz în parte, se obţine o singură soluţie, şi anume $x=y=1$ .... (2p)

Problema 3. Determinaţi numerele reale *a* şi *b* care verifică egalitatea

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}+\sqrt{b+2014}-2-\frac{a+b}{2}=0.$$

Iuliana Traşcă, Scorniceşti

Soluţie şi barem de corectare

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}=\sqrt{3\cdot(a-2014)}\le\dfrac{3+a-2014}{2}=\dfrac{a-2011}{2}$ .... (1p)

$\sqrt{b+2014}=\sqrt{1\cdot(b+2014)}\le\dfrac{1+b+2014}{2}=\dfrac{b+2015}{2}$ .... (1p)

Atunci $\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}+\sqrt{b+2014}\le\dfrac{a-2011+b+2015}{2}=2+\dfrac{a+b}{2}$ .... (1p)

Relaţia din enunţ corespunde situaţiilor de egalitate din inegalităţile de mai sus, deci $a-2014=3$ şi $b+2014=1$, de unde $a=2017$ şi $b=-2013$ .... (1p)

Problema 4. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 6$ cm şi $m(\sphericalangle BAD) = 60°$. De aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AM şi CQ pe planul (ABC) astfel încât $AM = 9$ cm şi $CQ = 3$ cm.

a) Demonstraţi că planele (MBD) şi (QBD) sunt perpendiculare.
b) Calculaţi distanţa dintre dreptele BD şi MQ.
c) Determinaţi cosinusul unghiului format de planele (MBQ) şi (ABC).

Dorin Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $m(\sphericalangle MOA) = 60°$, $m(\sphericalangle QOC) = 30°$ .... (1p)
Măsura unghiului plan corespunzător diedrului este $m(\sphericalangle MOQ) = 90°$, deci $(MBD) \perp (QBD)$ .... (1p)
b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$; construind $OP \perp MQ$ se arată că $d(BD, MQ) = OP$ .... (1p)
$OP = 3\sqrt{3}$ cm .... (1p)
c) Proiecţia triunghiului *MBQ* pe planul *ABC* este triunghiul *ABC* .... (1p)
Aria triunghiului *ABC* este $9\sqrt{3}$ cm^2, iar aria triunghiului *BMQ* este 36 cm^2 .... (1p)
Notând $\alpha = (MBQ),(ABC)$, avem $S_{ABC} = S_{MBQ} \cdot \cos\alpha$, de unde $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ .... (1p)