D / E / ^ d Z h > h / / b / Z d Z / / b d / / E / & /

INSPECTORATUL Ş K > Z : h E K > d

K > / D W / D d D d /

d W > K - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. 6 H F R Q V L G H U R P X O ţ L P H W L V I D F H V L P X O W D Q S U R S U L H W

a) ;

b) ;

c) ;

$ U W D L F.

Lucian Dragomir, * D] H W D 0 D W H P D W L F Q U

6 R O X ţ L H E D U H P G H F R U H F W D U H

D G L F ....(1p)

Pentru orice avem: ....(2p)

Atunci , de unde D G L F ....(1p)

) R O R V L Q G R Y D U L D Q W D S U L Q F L S L X O X L L Q G X F ţ L H L P D W H P D W L F ...(3p)

Problema 2. ' H W H U P L Q D ţ L W H U P H Q X O J H Q H U D O D O ú L U X O X L definit prin:

, ú L , .

Marius Perianu, Slatina

6 R O X ţ L H E D U H P G H F R U H F W D U H

....(1p)

9 R P G H P R Q V W U D S U L Q L Q G X F ţ L H P D W H P D W L F , pentru orice ... S U R S R] L ţ L D ...(1p)

P(1), P V X Q W D G H Y ă U D W H ....(1p)

....(2p)

, deci H V W H D G H Y ă U D W , pentru orice F D X U P D U H ....(2p)

Problema 3. Fie ABCD X Q S D W U X O D W H U L Q V F U L S W L E L O ú L F H Q W U X O Fie cercului circumscris, , ,

ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB ú L M, N mijloacele diagonalelor [AC], respectiv [BD].

a) $ U W D L F V H J P H Q W H O H ú L D X D F H O D ú L P L M O R F.

b) $ U W D L F O, P ú L F H Q W U X O F H U F X O X L P H G L D W R U ş L pentru mijlocul [MN] sunt coliniare.

c) $ U W D L F G D F W U L X Q J K L X U L O H D U I L H J D O H D W X Q F L patrulaterul ABCD este dreptunghi.

6 R O X ţ L H E D U H P G H F R U H F W D U H

a) ....(2p)

, ú L sunt paralelograme, ceea ce M X V W L I L F D I L U P D ţ L D ... (1p) Q H Q X

b) Fie Q mijlocul lui $[MN]$; avem $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)= =\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$, deci O, Q şi P sunt coliniare .... (2p)

c) MH_1H_3 şi NH_2H_4 au acelaşi centru de greutate dacă $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{OH_4}$ .... (1p)

De aici se obţine $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, de unde $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, adică $ABCD$ este paralelogram şi, fiind inscriptibil, paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi .... (1p)

Problema 4. Arătaţi că pentru orice numere reale $a,b,c>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3-ab\sqrt{ab}}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-bc\sqrt{bc}}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-ca\sqrt{ca}}{c^2+ca+a^2}\geq 0.$$

Costel Anghel, Negreni, Olt

Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{ab\sqrt{ab}}{a^2+ab+b^2}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b^2+bc+c^2}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c^2+ca+a^2}\quad(*)$$

Avem $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}=0$ .... (2p)

deci $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$ .... (1p)

Atunci $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right)$ .... (2p)

Inegalitatea $(*)$ se obţine observând că $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\sqrt{a^3b^3}=ab\sqrt{ab}$ şi analoagele .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale *x* pentru care $x^{\sqrt{x}} < \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Aurel Chiriţă, Slatina

Inecuaţia se scrie $x^{\sqrt{x}} < x^{\frac{x}{2}}$ .... (2p)

Pentru $x \in (0,1)$ rezultă $\sqrt{x} > \frac{x}{2}$, de unde $x \in (0,4) \cap (0,1) = (0,1)$ .... (2p)

Pentru $x \in (1,\infty)$ rezultă $\sqrt{x} < \frac{x}{2}$, de unde $x \in (4,\infty) \cap (1,\infty) = (4,\infty)$ .... (2p)

În concluzie, $x \in (0,1) \cup (4,\infty)$ .... (1p)

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n) < \lg^n(n+1) .$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Inegalitatea se scrie echivalent $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n)} < \lg(n+1)$ .... (1p)

Aplicând inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt[n]{\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg(2n)} < \frac{\lg 2 + \lg 4 + \ldots + \lg(2n)}{n} = \frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n}$ .... (2p)

Este suficient să arătăm că $\frac{\lg(2^n \cdot n!)}{n} < \lg(n+1)$, care se scrie echivalent

$2^n \cdot n! < (n+1)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ .... (2p)

Ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor 1, 2, …, n .... (2p)

Problema 3. Se consideră numerele complexe, nenule şi distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Ştiind că numerele $w_1 = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$, $w_2 = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2}$ şi $w_3 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$ sunt reale, arătaţi că $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Marius Perianu, Slatina

Notăm $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$, $s = z_1 + z_2 + z_3$, $m = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$, $p = z_1 z_2 z_3$.

Avem $w_k = \frac{m}{z_k}$ .... (1p)

Cum $w_k \in \mathbb{R}$, rezultă $w_k = \overline{w}_k$ .... (1p)

Deoarece $\overline{z_k}=\frac{r^2}{z_k}$ şi $\overline{m}=\frac{sr^4}{p}$, din $\frac{m}{z_k}=\frac{\overline{m}}{\overline{z_k}}$ rezultă $pm=sr^2z_k^2$, $k=1,2,3$ .... (2p)

Presupunând $s\neq 0$, rezultă $z_1^2=z_2^2=z_3^2=\frac{pm}{sr^2}$, deci cel puţin două dintre numerele z_1,z_2,z_3 sunt egale, contradicţie cu ipoteza .... (2p)

Ca urmare, $s=0$, de unde $m=0$ şi deci $w_1=w_2=w_3=0$ .... (1p)

Problema 4. Rezolvaţi ecuaţia:

$$(3^x+2)^{\log_5 3}+2=(5^x-2)^{\log_3 5}.$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Ecuaţia se rescrie $(3^x+2)^{\log_5 3}+2=5^{\log_3(5^x-2)}$ şi, notând $y=\log_5(3^x+2)$, rezultă $3^y+2=5^{\log_3(5^x-2)}$ sau, echivalent $\log_3(5^x-2)=\log_5(3^y+2)$ .... (2p)

Notând $z=\log_5(3^y+2)$, rezultă $\log_3(5^x-2)=z$, de unde $x=\log_5(3^z+2)$ .... (1p)

Considerând funcţia crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\log_5(3^t+2)$, rezultă $y=f(x),\ z=f(y),\ x=f(z)$ ..... (1p)

Presupunând, de exemplu, $x\le y$, atunci $x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)\Leftrightarrow y\le z\Rightarrow f(y)\le f(z)\Leftrightarrow z\le x$, deci $x\le y\le z\le x$, de unde $x=y=z$ .... (2p)

Ca urmare, $x=\log_5(3^x+2)\Leftrightarrow 3^x+2=5^x$, ecuaţie cu soluţia unică $x=1$. Aşadar, $x=y=z=1$ .... (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 15 februarie 2015

CLASA A XI-A

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

Fie $f(x) = \det(xI_2 - A) = x^2 - tx + d,$ unde $t = \operatorname{Tr} A,$ $d = \det A$ **2p**

Deoarece $A^2 + I_2 = (A - iI_2)(A + iI_2)$, rezultă $\det\left(A^2 + I_2\right) = f(i) f(-i) = (d-1)^2 + t^2$ **2p**

$\det(A + dI_2) = f(-d) = d^2 + td + d$ **1p**

Relaţia din enunţ conduce la $t^2 + 1 = td$, de unde $d = t + \dfrac{1}{t}$ **1p**

Atunci $|d| \geq |t| + \dfrac{1}{|t|} \geq 2$ **1p**

Problema 2.

Notăm $\det\left(A^2 - AB + B^2\right) = p$ şi $\det\left(A^2 + AB + B^2\right) = q$.

Cum $AB = BA \Rightarrow A^4 + A^2B^2 + B^4 = \left(A^2 - AB + B^2\right)\left(A^2 + AB + B^2\right)$, rezultă $pq = 9$ **2p**

Pentru $X = A^2 + B^2$ şi $Y = AB$, din identitatea $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y)$, rezultă $p + q = 10$ **4p**

Se obţine $\{p, q\} = \{1, 9\}$, de unde $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 4$ **1p**

Problema 3.

a) Folosind eventual faptul că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$, $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$ este convergent, rezultă:

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} = c_{2n} + \ln 2n - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2$, care converge la $\ln 2$ **2p**

b) Notăm $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Deoarece

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad b_n - a_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{k + \sqrt{n^2+k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+k} - n}{(n+k)\left(k + \sqrt{n^2+k}\right)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n+k)\left(k+\sqrt{n^2+k}\right)\left(\sqrt{n^2+k}+n\right)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3} = \frac{n(n+1)}{2n^3} \to 0, \end{aligned}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ **4p**

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln 2$ şi $a_n = b_n - (b_n - a_n)$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$ **1p**

Problema 4.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$, rezultă că $f(x) \in (1,2)$, pentru orice $x \in (1,2)$ **1p**

Cum $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$, rezultă că $x_n \in (1,2)$, pentru orice $n \geq 1$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit **1p**

Deoarece f este strict descrescătoare pe $(1,2)$, subşirurile $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n})_{n\geq 1}$ sunt strict monotone, de monotonii diferite, deci convergente **3p**

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n-1})$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{2n})$; atunci, prin trecere la limită rezultă $f(a) = b$ şi $f(b) = a$. **1p**

Ca urmare a şi b sunt soluţii ale ecuaţiei $(f \circ f)(x) = x$, care se scrie echivalent $\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 4x + 6\right) = 0$.

Cum $a, b \in [1,2]$, rezultă $a = b = \sqrt{2}$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ **1p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 15 februarie 2015

CLASA A XII-A

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

a) $a, b \in Z(G) \Rightarrow ab \in Z(G)$ **1p**

$a \in Z(G) \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$ **1p**

b) Fie $a \in G$ arbitrar. Vom arăta că $ax = xa$, pentru orice $x \in G$.

Dacă $a \in Z(G)$ sau $x \in Z(G)$ afirmaţia este evidentă **1p**

Dacă $a, x \in G \setminus Z(G)$, atunci $a^2 = x^2 = e$. Avem două cazuri:

- dacă $ax \in Z(G)$, atunci $ax \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot ax$, deci $a = x^{-1}ax$, de unde $xa = ax$ **2p**
- dacă $ax \notin Z(G)$, atunci $(ax)^2 = e = a^2 \cdot x^2$, de unde $xa = ax$ **2p**

Problema 2.

Notând integrala din enunţ cu I, cu schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$, rezultă $I = \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ **3p**

Cum $\sin t = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$, $\cos t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$ şi $\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}\right)$ **1p**

rezultă

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' dt}{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2-2u-1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-1-\sqrt{2}}{u-1+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$ **3p**

Problema 3.

Deoarece legea $*$ este asociativă, rezultă că $(a*b)*a = a*(b*a)$, pentru orice $a, b \in M$ **3p**

Notând cu e elementul neutru, rezultă $(a*b)*a*e = e*a*(b*a)$ şi, folosind proprietatea de simplificare din ipoteză pentru $x = a$, rezultă $(a*b)*e = e*(b*a)$, de unde $a*b = b*a$, pentru orice $a, b \in M$ **4p**

Problema 4.

($\Leftarrow$) Dacă $f(a) \geq 0$, atunci $f(t) \geq f(a) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ **1p**

Prin urmare, pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, avem

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0,$$

adică $F(x_1) \leq F(x_2)$ **2p**

($\Rightarrow$) Presupunem că $f(a) < 0$. Cum f este continuă în a şi $f(a) < \dfrac{f(a)}{2}$, există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(t) < \dfrac{f(a)}{2}$ pentru orice $t \in [a, c]$ **2p**

Obţinem $F(c) - F(a) = \displaystyle\int_a^c f(t)\,dt \leq (c-a)\cdot\frac{f(a)}{2} < 0$, contradicţie **2p**