Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a ...-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Evident avem $f(x)=\left|\sqrt{(x-9)^2+144}-\sqrt{(x+6)^2+64}\right|$ de unde, considerăm vectorii $\vec{u}=(x-9)\cdot\vec{i}+12\cdot\vec{j}$ şi $\vec{v}=(x+6)\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}$ şi folosind cunoscuta relaţie $\left\|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right\|\le\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$ obţinem $f(x)\le\left|-15\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}\right|=\sqrt{241}$.

Dacă vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari obţinem evident egalitate aşadar $\dfrac{x-9}{x+6}=\dfrac{12}{8}\Leftrightarrow x_0=-36$.

b) $E\in(BD)\Rightarrow(\exists)k$ astfel încât $\vec{BE}=k\cdot\vec{BD}=k\cdot\left(\vec{BA}+\vec{BC}\right),\vec{EC'}=-\vec{EC}=\vec{BE}-\vec{BC}=$
$=k\cdot\vec{BA}+(k-1)\cdot\vec{BC}$. $C'F\parallel AD\Rightarrow\vec{C'F}=\lambda\cdot\vec{BC}$.

$\vec{BF}=\vec{BC}+\vec{CC'}+\vec{C'F}=\vec{BC}+2\cdot\vec{EC'}+\lambda\cdot\vec{BC}=\vec{BC}+2\cdot k\cdot\vec{BA}+2\cdot(k-1)\cdot\vec{BC}+\lambda\cdot\vec{BC}=$
$=2\cdot k\cdot\vec{BA}+(\lambda+2\cdot k-1)\cdot\vec{BC}$.

Cum $\vec{BF},\vec{BA}$ sunt coliniari avem $\lambda+2\cdot k-1=0$ sau $\lambda=1-2\cdot k$,deci $\vec{C'F}=(1-2\cdot k)\cdot\vec{BC}$ şi $\vec{BF}=2\cdot k\cdot\vec{BA}$.

Deoarece $\vec{FE}=\vec{BE}-\vec{BF}=k\cdot\left(\vec{BA}+\vec{BC}\right)-2\cdot k\cdot\vec{BA}=k\cdot\vec{AC}$, rezultă că $EF\parallel AC$.

Apoi avem $\vec{FG}=\vec{FA}+\vec{FC'}=\vec{BA}-\vec{BF}-\vec{C'F}=(1-2\cdot k)\cdot\vec{BA}+(2k-1)\cdot\vec{BC}=(2k-1)\cdot\vec{AC}$, prin urmare punctele E, F şi G sunt coliniare.

Problema 2.

Soluţie.Notăm $u=\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}$.

Dar $x+y+z\geq 3\cdot\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}\Rightarrow u\leq\frac{1}{3}$ .Obţinem $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y^2\cdot z^2}=3\cdot u^2$.

Avem $(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x)\cdot(1+6\cdot x\cdot y\cdot z)\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y^2\cdot z^2}\cdot(1+6\cdot x\cdot y\cdot z)$.........................(1)

Arătăm că $3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y^2\cdot z^2}\cdot(1+6\cdot x\cdot y\cdot z)\geq 11\cdot x\cdot y\cdot z$ ....(2)

Intr-adevăr, înlocuind și simplificând prin u^2 obţinem :

$$3\cdot\left(1+6\cdot u^3\right)\geq 11\cdot u\Leftrightarrow 18\cdot u^3-11\cdot u+3\geq 0\Leftrightarrow(3\cdot u-1)\cdot\left(6\cdot u^2+2\cdot u-3\right)\geq 0 \text{ ....} (3)$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece ambele paranteze sunt negative în virtutea faptului că $6\cdot u^2+2\cdot u\leq\frac{6}{9}+\frac{2}{3}\leq 3$ **.** Relaţia (3) adevărată conduce la relaţia (2) adevărată, iar din (1) și (2) rezultă că relaţia din enunţ este adevărată.

Problema 3

Soluţie. Observăm că putem găsi $2^2-3=1, 2^3-3=5, 2^4-3=13, 2^5-3=29$ cel puţin patru numere de forma căutată oricare două prime între ele. Fie $a_1=2^{n_1}-3, a_2=2^{n_2}-3, a_3=2^{n_3}-3, ..., a_k=2^{n_k}-3$ numere găsite deja unde $2=n_1<n_2<n_3<...<n_k\in\mathbb{N}$.

Considerăm numărul $L=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_k$. Printre cele $L+1$ numere $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^L$ există cel puţin două care împărţite la L dau același rest, fie acestea 2^r și 2^s, unde $r>s$ .Aceasta înseamnă că există un număr natural p astfel încât $L\cdot p=2^r-2^s=2^s\cdot\left(2^{r-s}-1\right)$.

Deoarece L este natural impar rezultă că L nu divide pe 2^s și divide pe $2^{r-s}-1$, deci prin urmare există q natural astfel încât $L\cdot q=2^{r-s}-1$.

Numărul $4\cdot L\cdot q+1=4\cdot\left(2^{r-s}-1\right)+1=2^{r-s+2}-3$ este prim cu L și deci și cu fiecare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ și este mai mare ca acestea fiind mai mare ca L, deci poate fi ales drept a_{k+1} .

Prin urmare găsind k numere naturale ce verifică condiţiile problemei îl putem determina și pe al $(k+1)$-lea ceea ce arată că putem găsi o infinitate de astfel de numere.