Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Pentru că $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=1$ există $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos t=\frac{1}{3}$ şi $\sin t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Matricea $A=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ şi prin inducţie se arată că $A^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\exists\, m\neq n$ şi $A^m=A^n$.Atunci $\begin{cases}\cos mt=\cos nt\\ \sin mt=\sin nt\end{cases}$ implică

$m\cdot t=n\cdot t+2\cdot k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}$ sau $\frac{t}{\pi}=\frac{2\cdot k}{m-n}\in\mathbb{Q}$.Pentru a simplifica notaţia considerăm $\frac{t}{\pi}=\frac{2\cdot k}{p}, p\in\mathbb{N}$

obţinem $\cos p\cdot t=1$.Demonstrăm prin inducţie că există un polinom monic,de grad p, $F_p\in\mathbb{Z}[X]$,astfel

încât $2\cdot\cos p\cdot t=F_p(2\cdot\cos t)$ ceea ce revine la $2=F_p\left(\frac{2}{3}\right)$, fals, pentru că polinomul monic cu

coeficienţi întregi F_p-2 ,dacă are rădăcini raţionale atunci ele trebuie să fie numere întregi.

Demonstraţia prin inducţie:Dacă $p=1$ există $F_1=X\in\mathbb{Z}[X]$,dacă $p=2$ avem că $F_2=X^2-2\in\mathbb{Z}[X]$,

care verifică egalitatea $F_2(2\cos t)=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$.

Folosind ipoteza inductivă şi relaţia $2\cos(p+1)t+2\cos(p-1)t=2\cos pt\cdot 2\cos t$ obţinem că

$2\cos(p+1)t=F_p(2\cos t)\cdot F_1(2\cos t)-F_{p-1}(2\cos t)$. Deci, există polinomul monic,de gradul $p+1$

$F_{p+1}=F_p\cdot F_1-F_{p-1}\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât $2\cdot\cos(p+1)\cdot t=F_{p+1}(2\cdot\cos t)$.

b)Din $X^{n+1}=X^n\cdot X=X\cdot X^n$ obţinem că $A\cdot X=X\cdot A$ condiţie care revine la $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

Cum $\det X^n=\det A=1$ atunci $a^2+b^2=1$,adică putem determina $t\in[0;2\pi)$ cu $a=\cos t$ şi $b=\sin t$.

Obţinem $X^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.Prin identificarea elementelor corespunzătoare din

cele două matrice găsim $t_k=\frac{\arccos\frac{1}{3}+2k\pi}{n}\in[0;2\pi)$ pentru $k\in\{1,2,...,n-1\}$ .Soluţiile ecuaţiei sunt

$X_k=\begin{pmatrix}\cos t_k & -\sin t_k\\ \sin t_k & \cos t_k\end{pmatrix}, k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Problema 2.

Soluție.a)Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător,iar $x_n \leq 1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<2$.

Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit şi conform teoremei lui Weierstrass şirul este convergent.

Avem $x_{n+k}=x_n+\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}\left(1+\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot a_{n+3}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+2}\cdots\cdot a_{n+k}}\right)$.

Dar

$$\left(1+\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot a_{n+3}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+2}\cdots\cdot a_{n+k}}\right)<1+\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+2}{}^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+2}{}^{k-1}}<\frac{1-\frac{1}{a_{n+2}{}^k}}{1-\frac{1}{a_{n+2}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{a_{n+2}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{a_{n+1}}}$$

Obținem $x_{n+k}<x_n+\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}$ sau $0<x_{n+k}-x_n<\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot(a_{n+1}-1)}$ (1).

Notăm $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.Presupunem că $l\in\mathbb{Q}$, cu $l=\frac{p}{q}$; $p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1$.Pentru $k\to\infty$,din relația (1),

obțtnem $0<\frac{p}{q}-x_n\leq\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n(a_{n+1}-1)}$.

Pentru $n=q+1$,avem

$0<\frac{p}{q}-x_{q+1}\leq\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{q+1}(a_{q+2}-1)}$ .De unde $0<\left(\frac{p}{q}-x_{q+1}\right)\cdot q\cdot a_1a_2\cdots a_{q+1}\leq\frac{q}{(a_{q+2}-1)}$.

Observăm că $\frac{q}{(a_{q+2}-1)}<1\Leftrightarrow q+1\leq a_{q+2},$ adevărată.Cum $0<\left(\frac{p}{q}-x_{q+1}\right)\cdot q\cdot a_1a_2\cdots a_{q+1}\leq 1$ şi

$\left(\frac{p}{q}-x_{q+1}\right)\cdot q\cdot a_1a_2\cdots a_{q+1}\in\mathbb{N}$,contradicție.

b)Presupunem că există f şi g funcții polinomiale cu $x_n=\frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n\geq 1$.Atunci

$x_{n+1}-x_n=\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}\Rightarrow\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}=\frac{h(n)}{g(n)g(n+1)}$, $h(n)=f(n+1)g(n)-f(n)g(n+1)$.

$\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}=\frac{h(n)}{g(n)g(n+1)}\Rightarrow a_{n+2}=\frac{h(n)}{h(n+1)}\cdot\frac{g(n+1)g(n+2)}{g(n)g(n+1)}$ (2).

Trecând la limită în relația (2) se obține o contradicție $(\infty=1)$.

Problema 3.

Soluție. Pentru fiecare $n\geq 2$ fixat,mulțimea $\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ poate fi ordonată crescător.Fie $(i_1,i_2,\ldots i_n)$ o permutare a mulțimii $\{1,2,\ldots n\}$ astfel încât $a_{i_1}\leq a_{i_2}\leq\ldots\leq a_{i_n}$.

Folosind ipoteza obținem:

$$c\geq a_{i_n}-a_{i_1}=\left|a_{i_n}-a_{i_{n-1}}\right|+\left|a_{i_{n-1}}-a_{i_{n-2}}\right|+\cdots+\left|a_{i_2}-a_{i_1}\right|>\frac{1}{i_n+i_{n-1}}+\frac{1}{i_{n-1}+i_{n-2}}+\ldots+\frac{1}{i_2+i_1}.$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy- Buniakowski-Schwarz obținem

$$\frac{1}{i_n+i_{n-1}}+\frac{1}{i_{n-1}+i_{n-2}}+\ldots+\frac{1}{i_2+i_1}\geq\frac{(n-1)^2}{i_n+i_{n-1}+i_{n-1}+i_{n-2}+\cdots+i_2+i_1}.$$

Din cele două inegalități obținem

$$c\geq\frac{(n-1)^2}{2(i_1+i_2+\cdots+i_n)-i_1-i_n}=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-i_1-i_n}.$$

Dar $i_1+i_n\geq 3$ şi pentru $\forall n\geq 2\Rightarrow c>\frac{(n-1)^2}{n^2+n-3}$ care prin trecere la limită cu $n\to\infty$ conduce la $c\geq 1$.