Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XV-a

Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1.

a) **Soluţie I.** Deoarece $2=2\cdot 1,\ 4=2\cdot 2,\ 6=2\cdot 3,...,2014=2\cdot 1007$, avem că $r=\dfrac{2^{1007}\cdot 1007!}{7^x\cdot 17^y}$, de unde deducem că $r\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 7^x$ divide $1007!$ şi 17^y divide $1007!$. Din relaţiile $1007=7\cdot 143+6$, $1007=7^2\cdot 20+27$, $1007=7^3\cdot 2+321$ şi $1007<2401=7^4$ rezultă că printre numerele 1, 2, 3, ..., 1007 sunt $143-20=123$ numere care se divid cu 7 nu se divid cu 7^2, $20-3=17$ numere care se divid cu 7^2 şi se divid cu 7^3 şi 3 numere care se divid 7^3 şi nu se divid cu 7^4. Deci, din $r\in\mathbb{N}$ rezultă $x\le 123\cdot 1+17\cdot 2+3\cdot 3\Leftrightarrow x\le 166$.

Analog, din relaţiile $1007=17\cdot 59+4$, $1007=17^2\cdot 3+140$ şi $1007<4913=17^3$ rezultă că printre numerele 1, 2, 3, ..., 1007 sunt $59-3=56$ numere care se divid cu 17 şi nu se divid cu 17^2 şi 3 numere care se divid cu 17^2 şi nu se divid cu 17^3. Deci, din $r\in\mathbb{N}$ rezultă $y\le 56\cdot 1+3\cdot 2\Leftrightarrow y\le 62$.

Prin urmare, cel mai mic element al mulţimii A este $r=\dfrac{2^{1007}\cdot 1007!}{7^{166}\cdot 17^{62}}$.

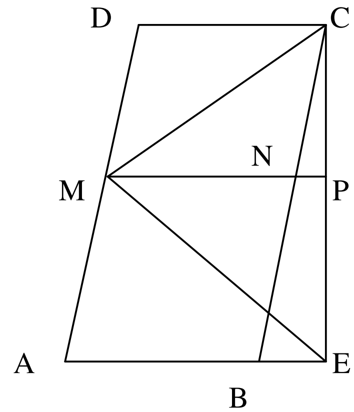
Soluţia a II-a. Cel mai mic numărul natural de forma $r=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2014}{7^x\cdot 17^y}=\dfrac{2^{1007}\cdot 1007!}{7^x\cdot 17^y}$ se obţine când x este exponentul lui 7 din descompunerea în factori prim a lui $1007!$ şi y este exponentul lui 17 din descompunerea în factori primi a lui $1007!$. Din teorema lui Legendre avem

$$x=\left[\frac{1007}{7}\right]+\left[\frac{1007}{7^2}\right]+\left[\frac{1007}{7^3}\right]+\left[\frac{1007}{7^4}\right]+...=143+20+3+0+...=166 \text{ şi}$$

$$y=\left[\frac{1007}{17}\right]+\left[\frac{1007}{17^2}\right]+\left[\frac{1007}{17^3}\right]+...=59+3+0+...=62.$$

Prin urmare, cel mai mic element al mulţimii A este $r=\dfrac{2^{1007}\cdot 1007!}{7^{166}\cdot 17^{62}}$.

b)



Fie $MP \parallel AB$. Cum $CE \perp AB \Rightarrow MP \perp CE$.
N este mijlocul lui $[CB] \Rightarrow$ P este mijlocul lui $[CE]$. Deci triunghiul MCE este isoscel şi [MP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EMC$.
$MP \parallel AE \Rightarrow \sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle PME$ (alt.int.)
$MNCD$ este romb, deci $\sphericalangle DMC \equiv \sphericalangle PMC$. În concluzie, $m(\sphericalangle DME) = 3 \cdot m(\sphericalangle AEM)$

Problema 2.

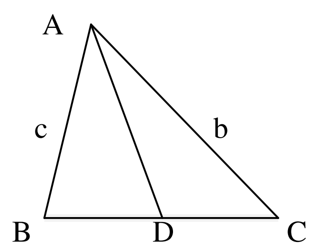
Soluţie.

a) Adunând inegalităţile obţinem $0 \geq 0$.
Rezultă că nici una din inegalităţi nu poate fi strictă, deci toate sunt egalităţi.
Din prima egalitate rezultă că $a_1 - 5 \cdot a_2 + 4 \cdot a_3 = 0$ sau

$$a_1 - a_2 = 4 \cdot (a_2 - a_3)$$
$$a_2 - a_3 = 4 \cdot (a_3 - a_4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2014} - a_1 = 4 \cdot (a_1 - a_2)$$

Deci $a_1 - a_2 = 4 \cdot (a_2 - a_3) = 4^2 \cdot (a_3 - a_4) = \ldots = 4^{2014} \cdot (a_1 - a_2)$, din care rezultă că $a_1 = a_2$. În concluzie $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2014} = 1$.

b)



Fie $BC = 1\,cm$, $AD = 3\,cm$, $BD = DC = \frac{1}{2}$

i) În $\triangle ABD$ avem: $AD - BD < AB < AD + BD$. Analog
În $\triangle ADC$ avem: $AD - DC < AC < AD + DC$ .Deci:
$3 - \frac{1}{2} < b < 3 + \frac{1}{2}$ şi $3 - \frac{1}{2} < c < 3 + \frac{1}{2}$. Prin adunarea celor două relaţii obţinem:
$5 < b + c < 7$. Cum perimetrul trebuie să fie un număr întreg, rezultă că $b + c = 6$. Deci perimetrul triunghiului va fi egal cu $7\ cm$.

ii) Cum $a = 1, b + c = 6 \Rightarrow$ triunghiul nu poate fi echilateral.
Dacă $b = c$, cum $b + c = 6 \Rightarrow b = c = 3$ ceea ce nu este posibil(deoarece laturile AB şi AC ale triunghiului ar fi egale cu mediana AD)
Nu putem avea nici $a = c$ sau $a = b$ deoarece $\frac{5}{2} < b < \frac{7}{2}$ şi $\frac{5}{2} < c < \frac{7}{2}$.
În concluzie triunghiul ABC este un triunghi oarecare.

Problema 3

a) Avem că

$$S_0 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + 52$$
$$S_0 = 52 + 51 + 50 + \ldots + 3 + 2 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2 \cdot S_0 = \underbrace{53 + 53 + 53 + \ldots + 53 + 53 + 53}_{\text{de 52 ori}}$$

Deci, $S_0 = 53 \cdot 52 : 2 = 1378$.

b) Vom nota numărul de scatii aflaţi după 31 de zboruri duble pe al k-lea copac cu a_k (numărul de scatii de primul copac este notat cu a_1, numărul de scatii de al doilea copac este notat cu a_2 şi aşa mai departe). Cu aceste notaţii avem $S_{31} = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + ... + 52 \cdot a_{52}$. Vom demonstra că dacă doi scatii zboară pe copacii vecini, în sensuri opuse, atunci $S_{32} - S_{31} = -52$ sau 0 sau 52.

Într-adevăr, să presupunem că un scatiu zboară de pe copacul al p-lea pe copacul vecin în sensul acelor de ceasornic. Atunci în suma S_{31} se schimbă doi termeni. Dacă $p < 52$, atunci se modifică termenul al p-lea şi termenul al $(p+1)$-lea şi suma lor devine

$$p \cdot (a_p - 1) + (p+1) \cdot (a_{p+1} + 1) = p \cdot a_p + (p+1) \cdot a_{p+1} + 1$$

adică suma s-a mărit cu 1. Daca $p = 52$, atunci se modifică termenul al 52-lea şi primul, iar suma lor

$$52 \cdot (a_{52} - 1) + 1 \cdot (a_1 + 1) = 52 \cdot a_{52} + 1 \cdot a_1 - 51$$

s-a micşorat cu 51.

Invers, dacă scatiul zboară în sens contrar acelor de ceasornic de pe copacul al p-lea pe copacul vecin, adică al $(p-1)$-lea pe copacul . Atunci în suma S_{31} se schimbă doi termeni. Dacă $p \geq 2$, atunci se modifică termenul al p-lea şi termenul al $(p-1)$-lea şi suma lor devine

$$(p-1) \cdot (a_{p-1} + 1) + p \cdot (a_p - 1) = (p-1) \cdot a_{p-1} + p \cdot a_p - 1$$

adică suma s-a micşorat cu 1. Daca $p = 1$, atunci se modifică termenul al 52-lea şi primul, iar suma lor

$$52 \cdot (a_{52} + 1) + 1 \cdot (a_1 - 1) = 52 \cdot a_{52} + 1 \cdot a_1 + 51$$

s-a mărit cu 51.

În concluzie, când avem un zbor dublu, adică când ambii scatii zboară pe copacii vecini (unul într-un sens, altul în celălalt sens), suma S_{31} nu se modifică sau scade cu 52 sau creşte cu 52. Prin urmare, $S_{32} - S_{31} \in \{-52; 0; 52\}$, de unde obţinem $|S_{32} - S_{31}| \leq 52$.

c) După un număr oarecare de zboruri suma va fi egală $1378 + 52 \cdot x$, unde $x \in \mathbb{N}^*$. Dacă toţi scatii s-ar strânge pe un singur copac, să zicem al y-lea, $1 \leq y \leq 52$, atunci suma ar trebui să fie egală cu $52 \cdot y$, deci ar trebui să fie satisfăcută egalitatea $1378 + 52 \cdot x = 52 \cdot y \Leftrightarrow 53 + 2 \cdot x = 2 \cdot y \Leftrightarrow 53 = 2 \cdot (y - x)$, ceea ce este imposibil, deoarece 53 este impar şi $2 \cdot (y - x)$ este număr par. Prin urmare, cei 52 de scatii nu se pot strânge pe un singur copac.