Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a VIII -a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. **a)** Impunem condiţia de existenţă pentru fracţie $|x-2|\neq 0$, de unde obţinem $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Cum $|x-2|>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, rezultă că $5-|x-3|\geq 0$, adică $|x-3|\leq 5$.

Astfel avem $-5\leq x-3\leq 5$, de unde rezultă că $-2\leq x\leq 8$. Deci $x\in[-2;8]\setminus\{2\}$.

b) Din $x-5\cdot y+2=0$ rezultă $y=\dfrac{x+2}{5}$. În expresia E, sub radicali, grupăm termenii şi formăm pătrate perfecte astfel: $E=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$. Înlocuim $y=\dfrac{x+2}{5}$ şi obţinem $E=\sqrt{(x+2)^2+\left(\dfrac{x+2}{5}\right)^2}+\sqrt{(x-3)^2+\left(\dfrac{x+2}{5}-1\right)^2}$, adică

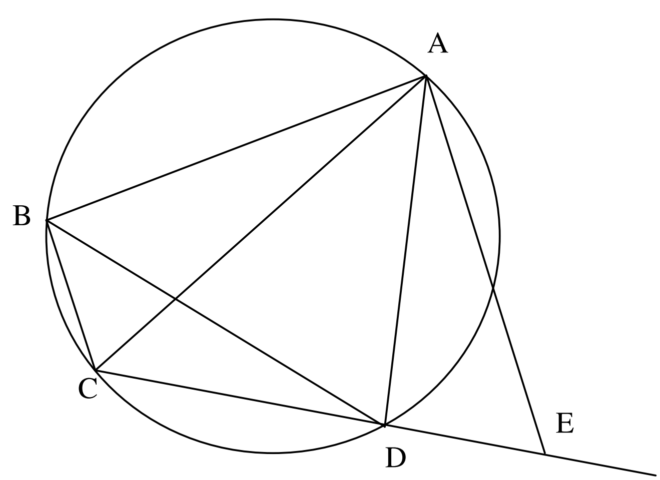
$$E=\sqrt{26\cdot\left(\frac{x+2}{5}\right)^2}+\sqrt{26\cdot\left(\frac{x-3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{5}\cdot|x+2|+\frac{\sqrt{26}}{5}\cdot|x-3|$$

Din $x\in[-2;3]$ rezultă că $x\geq -2$ şi $x\leq 3$, ceea ce ne conduce la $|x+2|=x+2$ şi $|x-3|=3-x$.

Deci $E=\dfrac{\sqrt{26}}{5}\cdot(x+2+3-x)=\sqrt{26}$.

Problema 2.

Soluţie. a)



i. Deoarece $ABCD$ este un patrulater convex cu unghiurile $\sphericalangle BAD$ şi $\sphericalangle BCD$ suplementare rezultă că unghiurile $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ADC$ sunt suplementare. Ţinând cont că semidreptele $(DC$ şi $(DE$ sunt opuse obţinem că unghiurile $\sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle ADE$ sunt suplementare, de unde rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADE$ (1).

Din (1) şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAE$ rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, de unde obţinem că

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ (2).

Avem că $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CAE)$, de unde

$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$ (3). Din relaţia (3) şi $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (din relaţia 2) rezultă că $\Delta BAD \sim \Delta CAE$,

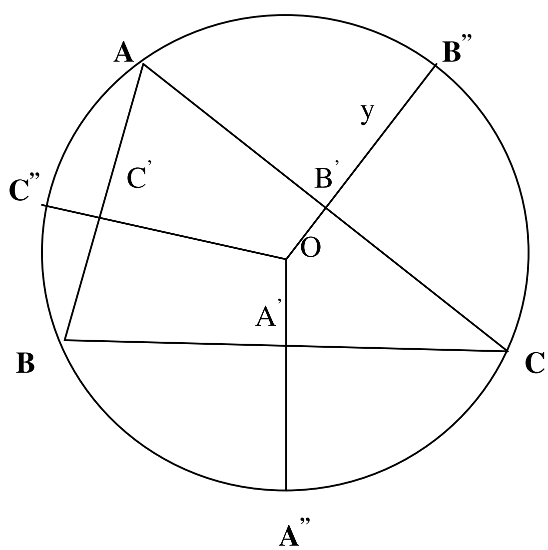
care implică $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$, adică $AB \cdot EC = AC \cdot BD$.

ii. Din (2) obţinem $AB \cdot DE = AD \cdot BC$ (4)

Folosind i. şi (4) avem că

$AC \cdot BD = AB \cdot EC = AB \cdot (CD + DE) = AB \cdot CD + AB \cdot DE = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

b)



Fie $A'A'' = x,\ B'B'' = y,\ C'C'' = z$.

Din O centrul cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC rezultă că

$OA' \perp BC,\ OB' \perp AC,\ OC' \perp AB$. Astfel avem perechile de unghiuri suplementare:

$\sphericalangle OA'B$ şi $\sphericalangle OC'B$; $\sphericalangle OA'C$ şi $\sphericalangle OB'C$; $\sphericalangle OB'A$ şi $\sphericalangle OC'A$, de unde rezultă că patrulaterele $A'OC'B,\ B'OA'C, C'OB'A$ sunt inscriptibile.

Deoarece A', B', C' sunt mijloacele laturilor $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$, avem că

$A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2},\ B'C' = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2},\ C'A' = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$ $(*)$.

Aplicăm teorema lui Ptolemeu (punctul ii de la problema anterioară) în patrulaterele inscriptibile $A'OC'B,\ B'OA'C, C'OB'A$ şi folosind notaţiile standard pentru lungimile laturilor şi relaţiile $(*)$ obţinem :

$(R - x) \cdot \frac{c}{2} + (R - z) \cdot \frac{a}{2} = R \cdot \frac{b}{2}$, adică

$R \cdot c - x \cdot c + R \cdot a - a \cdot z = R \cdot b;$ (1)

$R \cdot b - x \cdot b + R \cdot a - a \cdot y = R \cdot c;$ (2)

$R \cdot b - z \cdot b + R \cdot c - c \cdot y = R \cdot a;$ (3)

Adunăm cele 3 relaţii şi obţinem $R \cdot (a+b+c) - x \cdot (b+c) - y \cdot (a+c) - z \cdot (a+b) = 0$ echivalent cu $2 \cdot p \cdot R = x \cdot (2 \cdot p - a) + y \cdot (2 \cdot p - b) + z \cdot (2 \cdot p - c)$, adică $2 \cdot p \cdot R = 2 \cdot p \cdot (x+y+z) - (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)$, de unde rezultă concluzia în urma împărţirii la $2 \cdot p$.

Problema 3

Soluţie. **a)** Notăm $A = 123456789$, $B = \underbrace{11...1}_{p\ ori}\underbrace{22...2}_{p\ ori}\underbrace{33...3}_{p\ ori}...\underbrace{99...9}_{p\ ori}$,

$C = 1\underbrace{00...02}_{p\ cifre}\underbrace{00...03}_{p\ cifre}...8\underbrace{00...09}_{p\ cifre} = 10^{8p} + 2 \cdot 10^{7p} + 3 \cdot 10^{6p} + ... + 8 \cdot 10^{p} + 9$, $E = \underbrace{11...1}_{p\ ori}$

Avem că $B = E \cdot C$, iar

$C - A = \left(10^{8p} - 10^{8}\right) + 2 \cdot \left(10^{7p} - 10^{7}\right) + 3 \cdot \left(10^{6p} - 10^{6}\right) + ... + 8 \cdot \left(10^{p} - 10\right)$ şi

$10^{p} - 10 = (9 \cdot E + 1) - 10 = 9 \cdot (E - 1)$.

Conform „micii teoreme” a lui Fermat, numărul $n^{p} - n$ se divide prin p, pentru orice număr prim p şi pentru orice număr natural n. În particular,

$10^{p} - 10, 10^{2p} - 10^{2}, 10^{3p} - 10^{3}, ..., 10^{8p} - 10^{8}$ se divid prin p. Obţinem astfel că $9 \cdot (E-1) \vdots p$ şi $(C - A) \vdots p$.

Cum $B - A = E \cdot C - A \cdot E + A \cdot E - A = E \cdot (C - A) + A \cdot (E - 1)$ şi $A \vdots 9$ rezultă că $B - A$ se divide prin p.