Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a XIV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a IX-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie.

a)
$(x,y)\in\{(1,5);(5,1);(2,5);(5,2);(3,5);(5,3);(4,5);(5,4);(3,4);(4,3)\}\Rightarrow$

$$S_5=\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot3}+\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot1}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot2}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot4}=1.$$

b) Pentru n=2 $\Rightarrow(x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}\Rightarrow S_2=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot1}=1.$

Pentru n=3 $\Rightarrow(x,y)\in\{(1,3);(3,1);(2,3);(3,2)\}\Rightarrow S_3=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot1}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot2}=1.$

Pentru n=4 $\Rightarrow(x,y)\in\{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2);(3,4);(4,3)\}\Rightarrow S_4=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot1}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot3}=1.$

Observăm că $S_n=1$.

Pentru a obţine suma S_4 am păstrat din suma S_3 termenii $\frac{1}{2\cdot3}$ şi $\frac{1}{3\cdot2}$, am eliminat termenii $\frac{1}{1\cdot3}$ şi $\frac{1}{3\cdot1}$ şi am adăugat termenii $\frac{1}{1\cdot4},\frac{1}{4\cdot1}$ şi $\frac{1}{3\cdot4}$ şi $\frac{1}{4\cdot3}$.

Demonstrăm prin inducţie că $\Rightarrow S_n=1,(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq2$.

P(n): $S_n=1$, unde $n\in\mathbb{N},n\geq2$.

P(2) este adevărată. (1)

Demonstrăm că P(n)$\Rightarrow$P(n+1), unde $n\in\mathbb{N},n\geq2$.(2)

Observăm că toţi termenii $\frac{1}{x\cdot y}$ din suma S_n, pentru care $x+y>n+1,\ x\leq n,\ y\leq n$, există şi în suma S_{n+1}.

Eliminăm din suma S_n toţi termenii pentru care $x+y=n+1,\ x\leq n\ \text{şi}\ y\leq n$ şi adăugăm termenii pentru care $x+y>n+1,\ x\leq n+1, y\leq n+1$.

$$S_{n+1}=S_n-\left(\sum_{x\leq n,\ unde\ x\ \text{şi}\ n+1-x\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{x\cdot(n+1-x)}+\sum_{y\leq n,\ unde\ y\ \text{şi}\ n+1-y\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{y\cdot(n+1-y)}\right)+$$
$$\left(\sum_{x\leq n, unde\ x\ \text{şi}\ n+1\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{x\cdot(n+1)}+\sum_{x\leq n, unde\ n+1\ \text{şi}\ n+1-x\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1-x)}\right)+$$
$$\left(\sum_{y\leq n, unde\ y\ \text{şi}\ n+1\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{y\cdot(n+1)}+\sum_{y\leq n, unde\ y\ \text{şi}\ n+1-y\ sunt\ prime\ între\ ele}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1-y)}\right)$$

$$\frac{1}{x\cdot(n+1-x)}=\frac{1}{x\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1-x)}$$

$$\frac{1}{y\cdot(n+1-y)}=\frac{1}{y\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1-y)}$$

Prin urmare,

$$S_{n+1}=S_n-\left(\sum_{x\le n,\ unde\ x\ \text{şi}\ n+1-x\ sunt\ prime\ \hat{i}ntre\ ele}\frac{1}{x\cdot(n+1-x)}+\sum_{y\le n,\ unde\ y\ \text{şi}\ n+1-y\ sunt\ prime\ \hat{i}ntre\ ele}\frac{1}{y\cdot(n+1-y)}\right)+$$

$$+\left(\sum_{x\le n,\ unde\ x\ \text{şi}\ n+1-x\ sunt\ prime\ \hat{i}ntre\ ele}\frac{1}{x\cdot(n+1-x)}+\sum_{y\le n,\ unde\ y\ \text{şi}\ n+1-y\ sunt\ prime\ \hat{i}ntre\ ele}\frac{1}{y\cdot(n+1-y)}\right)\Rightarrow S_{n+1}=S_n$$

$S_n=1\Rightarrow S_{n+1}=1\Rightarrow$ propoziția P(n+1) este adevărată

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ P(n) este adevărată $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\ge 2$.

Problema 2

Soluție.

Considerăm pătratul $ABCD$ cu latura de lungime $a_1+a_2+...+a_n$ iar laturile partiționate în segmente de lungimi $a_1, a_2, ..., a_n$ în modul următor:

- laturile $[AB]$, $[DC]$ în ordinea $a_1-a_2 ...-a_{n-1}-a_n$, punctele fiind situate în ordinea $A-P_1-P_2-...-P_{n-1}-B$, $D-Q_1-Q_2-...-Q_{n-1}-C$
- laturile $[BC]$, $[AD]$ în ordinea $a_2-a_3-...-a_n-a_1$, iar ordinea punctelor este $B-R_1-R_2-...-R_{n-1}-C$, $A-S_1-S_2-...-S_{n-1}-D$. Notăm intersecțiile

$[S_iR_i]\cap[P_jQ_j]=T_{ij}, i, j\in\{1,2,...,n\}$

Se obține astfel o partiționare a pătratului în n^2 dreptunghiuri iar membrul stâng reprezintă suma lungimilor diagonalelor dreptunghiurilor

$AP_1T_{11}S_1$, $T_{11}T_{12}T_{22}T_{21}$, ..., $T_{n-1,n-1}R_{n-1}CQ_{n-1}$, respectiv linia poligonală

$AT_{11}+T_{11}T_{22}+...+T_{n-1,n-1}C$ cu lungimea mai mare sau egală decât a diagonalei

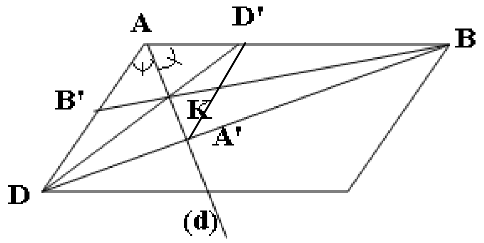
$AC=(a_1+a_2+...+a_n)\cdot\sqrt{2}$.

Egalitatea are loc atunci când $a_1=a_2=...=a_n$.

Problema 3

Soluție.

a)



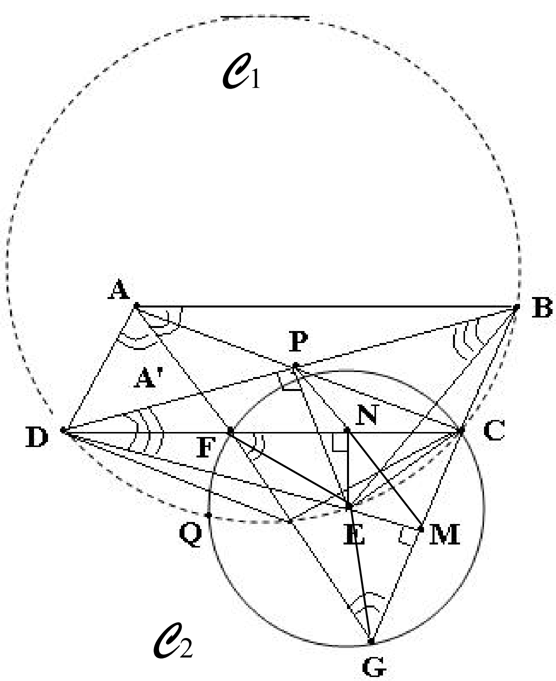
Dreapta (d) intersectează DB în A' . Fie B' mijlocul [AD] şi K intersecția dreptelor AA' şi BB'.

Dreapta DD' intersectează AB în D'.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{I}n\ \Delta ABD \xrightarrow{Th.Ceva} \dfrac{AB'}{B'D}\cdot\dfrac{DA'}{A'B}\cdot\dfrac{BD'}{D'A}=1 \\ AB'=B'D \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\dfrac{DA'}{A'B}=\dfrac{AD'}{BD'}\Rightarrow D'A' \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle DAA' \equiv \sphericalangle AA'D'$ şi $\sphericalangle A'AD' \equiv \sphericalangle DAA' \Rightarrow \sphericalangle D'AA' \equiv \sphericalangle AA'D' \Rightarrow \Delta AD'A'$ este isoscel.

b)



a) ABCD paralelogram

$\Rightarrow AD \parallel CB \Rightarrow \sphericalangle DAG \equiv \sphericalangle BGA$ (1)

$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle CFG \equiv \sphericalangle BAG$

Fie $\mathcal{C}_1$ cercul circumscris ΔBCD

Fie $\mathcal{C}_2$ cercul circumscris ΔGFC

[EF]$\equiv$[EG]$\equiv$[EC]$\Rightarrow$E este centrul cercului $\mathcal{C}_2$.

$C_1 \cap C_2 = \{C, Q\}$

Fie M mijlocul [GC] şi N mijlocul [FC]

$\Rightarrow EM \perp GC$ şi $EN \perp FC$.

$\Rightarrow$

Construim $EP \perp DB, P \in [DB]$

Punctele P,M şi N sunt situate pe dreapta lui Simson a triunghiului BCD $\Rightarrow$ P,M şi N sunt coliniare.

[MN] este linie mijlocie în $\Delta GFC \Rightarrow$

$MN \parallel GF \Rightarrow PM \parallel AG \Rightarrow$

[PM] este linie mijlocie în $\Delta CAG \Rightarrow$

P este mijlocul segmentului [AC]; ABCD paralelogram

$\Rightarrow$ P este mijlocul segmentului [BD].

PE$\perp$DB$\Rightarrow$EP este mediatoarea [BD] $\Rightarrow$ED=EB$\Rightarrow$E este mijlocul arcului $\overset{\frown}{BED}$.

QE=CE$\Rightarrow$E este mijlocul arcului $\overset{\frown}{QEC} \Rightarrow \overset{\frown}{DQ} \equiv \overset{\frown}{BC} \Rightarrow BCQD$ este trapez isoscel şi

$\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle EDB \equiv \sphericalangle ECM \Rightarrow (CE$ este bisectoarea $\sphericalangle GCF$. E este centrul cercului circumscris $\Delta GFC \Rightarrow \Delta FCG$ este isoscel (2) .

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \sphericalangle DAG \equiv \sphericalangle BAG \Rightarrow$ dreapta (d) este bisectoarea $\sphericalangle DAB$.