

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ**

Suceava, 15 februarie 2015

**Clasa a IX-a - profil tehnic, profil servicii și resurse naturale și protecția mediului, profil real-
specializarea științele naturii**

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 6y + 2 = 0$ și $x \in [-2, 4]$.

a) (2p) Arătați că $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 37y^2$

b) (3p) Arătați că $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17 = 37(y - 1)^2$;

c) (2p) Determinați partea întreagă a numărului $a = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$.

2. Fie $a, b, c > 0$.

a) (4p) Arătați că $\frac{2a}{ab+1} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$;

b) (3p) Arătați că dacă $abc = 1$ atunci $\frac{2a}{ab+1} + \frac{2b}{bc+1} + \frac{2c}{ca+1} \leq a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}$.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir neconstant cu proprietatea $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) (2p) Calculați $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$;

b) (2p) Arătați că $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) (3p) Arătați că $(b_n)_{n \geq 1}, b_n = \frac{a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este progresie aritmetică.

4. În patrulaterul convex $ABCD$ punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD]$ respectiv $[DA]$.

a) (2p) Arătați că $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$;

b) (2p) Arătați că $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$;

c) (3p) Arătați că $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AC}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.

Timp de lucru efectiv 3 ore.