Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XV-a
Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi A^n şi arătaţi că mulţimea $\left\{A^n / n \in \mathbb{N}\right\}$ are orice două elemente distincte.

b)Rezolvaţi în mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^n = A$.

Iuliana Duma,profesor,Galaţi

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale nenule.
Să se arate că:

a)Şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $\forall n \geq 1$ este convergent iar limita este un număr iraţional.

b)Nu există două funcţii polinomiale f şi g astfel încât $x_n = \frac{f(n)}{g(n)}, \forall n \geq 1$.

Vasile Popa,profesor,Galaţi

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pentru care există un număr real c cu $0 \leq a_i \leq c$ pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|a_i - a_j\right| > \frac{1}{i+j}$ pentru orice i şi j cu $i \neq j$.Arătaţi că $c \geq 1$.

* * *