INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –

CLASA A V-A

Subiecte

1. Arătați că dacă numărul natural $n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ este divizibil cu 20 , atunci numărul n are trei cifre identice.

Prof .Gheorghe Achim, Mizil

2. Se consideră numărul $a=26^{2016}+2\cdot 26^{2017}+26^{2018}$.

a. Arătați că numărul a este pătrat perfect și cub perfect.

b. Demonstrați că numărul $b=a:\left(81\cdot 32^{402}\cdot 169^{1004}\right)$ este număr natural.

Prof. Anton Negrilă, Ploieşti

3. a) Demonstrați că $7^3\cdot 5<2^6\cdot 3^3$

b) Comparați numerele $a=7^{6045}\cdot 3^{2014}$ și $b=1729^{2016}$.

Prof. Gabriel Țaga. Ploiești

4. Fie numerele:

$a=4^{2015}-3\cdot 4^{2014}-3\cdot 4^{2013}-...-3\cdot 4^{1002}$ și $b=3^{2349}-2\cdot 3^{2348}-2\cdot 3^{2347}-...-2\cdot 3^{1336}$.

Determinanți $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $a\cdot b=n^{668}$.

Prof. Roxana Soare,Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A VI-A
Subiecte

1. Aflați numerele naturale n de patru cifre care au proprietatea că acestea dau același rest la împărțirea cu $5, 13$ și 31.

***

2. Arătați că fracția $F = \frac{1+7+7^2+...+7^{2015}}{1+99+99^2+...+99^{2015}}$ se simplifică prin 200.

Prof. Ion Lupea , Ploieşti și Ion Tomescu, Mizil

3. Fie numerele naturale nenule $a = 6n+11$ și $b = 14n+23$, *n* număr natural.
Arătați că $[a;b] = a \cdot b$, unde $[a;b]$ este c.m.m.m.c al numerelor *a* și *b.*

Prof. Anton Negrilă, Ploieşti

4. Fie dreptele *AE* și *BD* concurente, $AE \cap BD = \{N\}$.Unghiurile $\measuredangle ANB$ si $\measuredangle DNE$ au măsurile $40x - 6^0$, respectiv $11y - 3^0$. Știind că $m(\measuredangle AND) = 20x$, aflați :

a) $x + y$

b) măsura unghiului format de bisectoarele $\measuredangle ANB$ si $\measuredangle BNE$.

Prof. Ion Bilciurescu , Boldești Scăeni

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A VII-A
Subiecte

1. Se consideră numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{Z}^*$ cu proprietatea că, din oricare patru numere, putem alege două numere cu suma egală cu zero.

a. Dați exemplu de o mulțime de șase numere care verifică proprietatea dată.

b. Determinați valoarea maximă a lui n.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

2. Fie numerele naturale nenule x, y cu proprietatea că $\frac{3xy}{13x+1} = y^2 - 2015$.

a. Demonstrați că $0 < \frac{y^2 - 2015}{y} < 1$.

b. Determinați valorile x, y pentru care este verificată relația din enunț.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

3. Fie dreptunghiul $ABCD$.Pe laturile $[BC]$ și $[DC]$ construim, în exteriorul dreptunghiului , triunghiurile echilaterale BCE și DCF. Demonstrați că :

a. $FC \perp BE$.

b. $RC \perp EF$,unde $\{R\} = EB \cap DF$.

Prof. Ion Bilciurescu, Boldești-Scăeni

4. În $\triangle ABC$, M şi N sunt mijloacele laturilor (AC) respectiv (BC), iar $E \in (NC)$ astfel încât $m(\measuredangle BAC) = 2m(\measuredangle NME)$. Dacă $BE = 4 \cdot NE$ atunci $AC = 2 \cdot AB$

Prof. Silvia şi Ionel Brabeceanu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –

CLASA A VIII-A

Subiecte

1. Determinați $a \in \mathbb{N}$ știind că numărul $\sqrt{a}+\sqrt{a+2015} \in \mathbb{Q}$.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Demonstrați că pentru orice *x, y* numere reale cu $|x|<2, |y|<2$ avem

$$\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{4-y^2} \geq \frac{2}{4-xy}$$

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Pe planul trapezului dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $DC = a$, $AB = 2a$ se ridică perpendiculara $\mathrm{MD} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Aflați distanța de la punctul *D* la planul *(MBC).*

Prof. Ion Lupea , Ploieşti și Ion Tomescu, Mizil

4. Fie triunghiul *ABC* cu *AB=AC=a* și $m(\measuredangle \mathrm{BAC}) = 90^0$. De aceeași parte a planului *(ABC)* se ridică perpendicularele *AD,BE* și *CF* astfel ca $\mathrm{AD}=\mathrm{CF}=2\mathrm{a}$ și $BE = a$. Punctul *M* este mijlocul segmentului *(CF).*

a) Arătați că dreptele *AE* și *BM* sunt perpendiculare.

b) Aflați măsura unghiului diedru format de planele *(AEF)* și *(DMB).*

Prof. Gheorghe Bumbăcea , Bușteni

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A IX-A
Subiecte

1. Demonstrați că:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}$$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

***

2. Demonstrați că pentru orice $x,y,z\in(-a\,;\,a)$, avem :

$$\frac{1}{a^2-x^2}+\frac{1}{a^2-y^2}+\frac{1}{a^2-z^2}\geq\frac{1}{a^2-xy}+\frac{1}{a^2-xz}+\frac{1}{a^2-yz}$$

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Fie *ABCD* un patrulater convex, *E* mijlocul diagonalei $[AC]$ și *P* un punct oarecare în plan. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PE}$ dacă și numai dacă *ABCD* este parallelogram.

***

3. Fie cercurile C1 şi C2 de centre O_1 si O_2 secante în A si B . O dreaptă variabilă ce trece prin B taie cercurile a doua oară în C respectiv D . Fie H_1 - ortocentrul ΔABC , H_2 - ortocentrul ΔABD , A_1 si A_2 punctele diametral opuse lui A în cele două cercuri .

Demonstraţi că : a) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{H_2H_1} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$; b) $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_2D}$.

Prof. Claudiu Militaru ,Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A X-A

Subiecte

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

***

2. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^{4x}+a^{4y}+a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{1}{y}}=4a^2$, unde $a>1,\ x\cdot y>0$.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Rezolvați sistemul $\begin{cases} a^x=(x+y)^{\log_2 a} \\ a^y=(y+z)^{\log_2 a} \\ a^z=(z+x)^{\log_2 a} \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$.

Prof Cezar Apostolescu, Ploiești

4. Aflați $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z-1|=2$ și $2^{|z+1|}=8+2^{|z|}$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A XI-A
Subiecte

1. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \frac{9}{n^3+3} + ... + \frac{n^2}{n^3+n}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Fie matricele diferite $A(a, x_p) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ x_p & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 \in \mathbb{Z}$ pentru care $A^n(0, x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determinați $p \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{N}$ pentru care

$$A(\mathrm{a}, x_1)A(\mathrm{a}, x_2)...A(\mathrm{a}, x_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2016 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = x_2 = 1$ si $x_{n+1} = \sqrt{x_n + nx_{n-1}}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.

a) Demonstrați că $n-3 < x_n < n-1$, oricare ar fi n număr natural, $n \geq 4$.

b) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, unde $y_n = \frac{nx_{n+k}}{(n+k)x_n}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixat.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Se consideră mulțimea permutărilor de ordin trei $S_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6\}$ și $e \in S_3$ permutarea identică. Arătați că:

a) $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6 \neq e$

b) $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6)^2 = \tau_1^2\tau_2^2\tau_3^2\tau_4^2\tau_5^2\tau_6^2$

c) $\tau_1\tau_2^2\tau_3^3\tau_4^4\tau_5^5\tau_6^6 \neq \tau_6\tau_5^2\tau_4^3\tau_3^4\tau_2^5\tau_1^6$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A XII-A
Subiecte

1. Calculați $I = \int \frac{tgx - 1}{tgx + \sin x + 1} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Determinați matricele $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ știind că $X^4 = A$.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Se consideră șirurile $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$ și $(E_n)_{n\geq 1}$, $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(8k+1)(8k+5)}$.

a) Calculați I_0 și I_8

b) Arătați că $\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n-2}$, oricare ar fi n număr natural, $n \geq 2$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

4. a) Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcție continuă și $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel:

$a_n = \int_0^1 f^n(x) dx$, oricare ar fi n număr natural nenul. Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ are limită.

b) Arătați că oricare ar fi $\alpha \in [0,1]$ există o funcție continuă $f_\alpha : [0,1] \to [0,\infty)$

astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_\alpha^n(x) dx = \alpha$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.