Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a V-a

Subiectul 1

Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 și restul $\overline{bc}-8$. (7p)

Subiectul 2

1. Arătați că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte. (4p)
2. Demonstrați că numărul $B=2015+2+6+10+...+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. (3p)

Subiectul 3

Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot4^{332}-2^{663}$ și $b=3^{500}-2\cdot3^{499}-2\cdot3^{498}-...-2\cdot3^{443}-2\cdot3^{442}$

a) Să se compare numerele a și b. (4p)

b) Să se determine cel mai mic număr p *prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se dividă cu 10. (3p)

Subiectul 4

Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale (7p)

(1,1)
(1,2) (2,1)
(1,3) (2,2) (3,1)
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$.

Problema 2

Mulţimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic şi celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătaţi că $n = 2015$.

b) Demonstraţi că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulţimii M.

Problema 3

Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2$ cm, $OA_1 = 1$ cm şi $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ cm, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10}? Dar cea mai mică?

b) Arătaţi că, indiferent de modul lor de aşezare (în condiţiile problemei), toate punctele A_n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ aparţin segmentului (OB).

Problema 4

Determinaţi numărul fracţiilor ireductibile şi subunitare care au suma dintre numărător şi numitor egală cu 2015.

Notă. *Timp de lucru: 2 ore*
Fiecare problemă se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 7.