Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2 - 3x + 2| = \left|\left|x - \frac{1}{3}\right| - \frac{2}{3}\right|$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n^2 - n}{3}\right] = n, n \in \mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a = BC, b = AC, c = AB$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și $3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$

Problema 4. Pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Subiectul 2.

Dacă $a_k \in (0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in \mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq n.$$

Subiectul 3.

a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a|+|z'+a|\geq |z-z'|$.

b) Dacă $a, z\in\mathbb{C}, |z|=1, n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n}\left|z^k+a\right|\geq n|z-1|$.

Subiectul 4.

Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât $\mu\left(\widehat{xOA}\right)=\frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.