



# Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2015

Ediția a 14-a

Focșani, Ianuarie 2015

Clasa a 10-a

**Problema 1.** Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ .

Arătați că:  $|z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016}| = 3$ .

Lucian Lazăr

### Soluție

Fie  $\frac{z_1}{z_2} = \cos \theta + i \sin \theta$  și  $\frac{z_2}{z_3} = \cos \phi + i \sin \phi$ . Atunci  $\frac{z_3}{z_1} = \cos(-\theta - \phi) + i \sin(-\theta - \phi)$   
..... **2 puncte**

Pentru că suma acestor numere este 1 obținem  $0 = \sin \theta + \sin \phi - \sin(\theta + \phi) =$   
 $2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2} - 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta + \phi}{2} = 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} (\cos \frac{\theta - \phi}{2} - \cos \frac{\theta + \phi}{2}) = 4 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}$ .  
..... **2 puncte**

De aici rezultă că  $\theta = 2k\pi$  sau  $\phi = 2k\pi$  sau  $\theta + \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , deci  $z_1 = z_2$  sau  
 $z_2 = z_3$  sau  $z_3 = z_1$  ..... **1 punct**

Dacă  $z_1 = z_2$ , atunci  $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 0$  sau  $(\frac{z_1}{z_3})^2 = -1$ . Atunci  $\frac{z_1}{z_3} = \pm i$ , deci  $|z_1^{2016} + z_2^{2016} +$   
 $z_3^{2016}| = |z_1|^{2016} |2 + (\pm i)^{2016}| = 3$  ..... **2 puncte**

**Problema 2.** Fie  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*, n \geq 1$  numere care au același modul. Arătați că:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right| \leq n^2.$$

Cristi Săvescu

### Soluție

Scriem  $z_k = m(\cos a_k + i \sin a_k)$ , unde  $m$  este modulul comun al numerelor date și  
 $a_k \in [0, 2\pi), k = 1, 2, \dots, n$  ..... **1 punct**

Observăm că  $\frac{m}{z_k} = \frac{1}{\cos a_k + i \sin a_k} = \frac{\cos(0) + i \sin(0)}{\cos a_k + i \sin a_k} = \cos(-a_k) + i \sin(-a_k) = \cos a_k - i \sin a_k$ ,  
 $\forall k = 1, 2, \dots, n$  ..... **1 punct**

Atunci  $A = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} = m \sum_{k=1}^n (\cos a_k + i \sin a_k) \cdot \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n z_k (\cos a_k - i \sin a_k)$ , adică

$A = (\sum_{k=1}^n \cos a_k)^2 + (\sum_{k=1}^n \sin a_k)^2$ . Deci putem afirma că  $A$  este un număr real pozitiv și  
 $|A| = A$  ..... **2 puncte**

Mai departe  $A = (\sum_{k=1}^n \cos a_k)^2 + (\sum_{k=1}^n \sin a_k)^2 = \sum_{k=1}^n \cos^2 a_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos a_i \cos a_j +$

$\sum_{k=1}^n \sin^2 a_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin a_i \sin a_j$   $A = n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(a_i - a_j) \leq n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$   
 ..... **3 puncte**

**Problema 3.**

(a) Fie  $m \in \mathbb{N}^*$ . Câte soluții are în  $\mathbb{N}^*$  inecuația:  $x^m \leq 2015$ ? Dar  $m^x \leq 2015$ ?

(b) Demonstrați că pentru orice  $n \geq 2$  are loc identitatea

$$\sum_{k=2}^n [\sqrt[k]{n}] = \sum_{k=2}^n [\log_k n].$$

Cristi Săvescu

**Soluție**

(a) Dacă  $x^m \leq 2015$ , atunci  $x \leq \sqrt[m]{2015}$ , deci  $x \leq [\sqrt[m]{2015}]$ . Atunci numărul soluțiilor acestei inecuații este  $[\sqrt[m]{2015}]$  ..... **1 punct**

Analog, pentru cea de-a doua inecuație, numărul soluțiilor este  $[\log_m 2015]$  .. **1 punct**

(b) Fie mulțimea  $S_n = \{(a, b) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} : a^b \leq n\}$  ..... **2 puncte**  
 Numărăm în două moduri cardinalul acesteia:

(1) Fixăm  $\alpha \in \{2, 3, \dots, n\}$ . Ecuația  $\alpha^x \leq n$  are  $[\log_\alpha n]$  soluții în  $\{1, 2, \dots, n\}$ , deci  $S$  are  $n + \sum_{k=2}^n [\log_k n]$  soluții.

(2) Fixăm  $\beta \in \{2, 3, \dots, n\}$ . Ecuația  $x^\beta \leq n$  are  $[\sqrt[\beta]{n}]$  soluții în  $\{1, 2, \dots, n\}$ , deci  $S$  are  $n + \sum_{k=2}^n [\sqrt[k]{n}]$  soluții ..... **3 puncte**

**Problema 4.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

(a) Arătați că  $f$  este impară.

(b) Determinați funcția  $f$  știind că mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x\}$  este finită.

Cristi Săvescu

## Soluție

(a) Pentru  $x = 0$  obținem  $f(0) = yf(0)$  pentru orice  $y$ , deci  $f(0) = 0$  ..... **1 punct**  
Dacă  $f(1) = 0$ , atunci pentru  $y = 1$  avem  $f(0) = f(x)$ , pentru orice  $x$ , deci  $f \equiv 0$  care este impară. Dacă  $f(1) \neq 0$ , atunci  $f(x) = f(y)$  implică  $f(f(x)) = f(f(y)) = xf(1) = yf(1)$ , deci  $x = y$ , deci  $f$  este injectivă. .... **1 punct**

Atunci  $f(xf(1)) = f(x)$  implică  $x = xf(1)$  pentru orice  $x$ , deci  $f(1) = 1$ .  
Mai departe,  $f(f(y)) = yf(1) = y$  pentru orice  $y$ . Atunci  $f(f(x)f(y)) = yf(f(x)) = xy$ , deci  $f(xy) = f(f(f(x)f(y))) = f(x)f(y)$ . Deci  $f(-1)^2 = f(1) = 1$ , iar cum  $f(1) = 1$  și  $f$  este injectivă, atunci  $f(-1) = -1$ , iar  $f(-x) = f(-1)f(x) = -f(x)$  pentru orice  $x$  ..... **1 punct**

(b) Dacă  $f \equiv 0$ , este clar că mulțimea punctelor fixe este  $\{0\}$ , deci finită.

Dacă însă  $f \neq 0$ , conform celor arătate mai sus, avem  $f(xy) = f(x)f(y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Fie  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$ . Atunci  $\{-1, 0, 1\} \subset A$  ..... **1 punct**

Mai mult, dacă  $x \in A$ , atunci  $f(x^2) = f^2(x) = x^2$  și inductiv  $f(x^n) = x^n$ , pentru orice  $n \geq 1$ , deci  $x \in A$  implică  $x^n \in A$ , iar cum  $A$  este finită rezultă că  $A \subset \{-1, 0, 1\}$ . Întrădevăr, dacă  $x \in A$  are modul diferit de 0 sau 1, atunci mulțimea  $\{x, x^2, x^3, \dots\}$  este infinită și inclusă în  $A$ , deci  $A$  ar fi infinită, contradicție. Deci  $A = \{-1, 0, 1\}$  ..... **1 punct**

În relația din ipoteză, pentru  $x = y$  avem  $f(xf(x)) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Deci  $xf(x)$  este punct fix pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $xf(x) \in \{-1, 0, 1\}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  ... **1 punct**

Pentru  $x = 0$ , avem  $f(x) = 0$  iar pentru  $x \neq 0$  avem  $f(x) \neq 0$  (din injectivitate), deci  $xf(x) \in \{-1, 1\}$ . Dacă  $x > 0$ , atunci  $xf(x) = xf(\sqrt{x^2}) = xf^2(\sqrt{x}) \geq 0$ , deci  $xf(x) = 1$ , adică  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Pentru  $x < 0$ , avem  $-x > 0$ , deci  $f(-x) = \frac{1}{-x}$ . Atunci, din (a) avem  $f(-x) = -f(x) = -\frac{1}{x}$ , deci  $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$  ..... **1 punct**