Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, ianuarie 2015
Clasa a VII-a, SOLUȚII

Subiectul 1. Se dă mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\ \middle|\ \frac{5\sqrt{x}+\sqrt{p}}{\sqrt{x}+p\sqrt{p}}\in\mathbb{N}\right\}$. Să se determine toate numerele naturale prime p de două cifre pentru care $\text{Card}\,A=4$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. $\frac{5\sqrt{x}+\sqrt{p}}{\sqrt{x}+p\sqrt{p}}=\frac{\left(5\sqrt{x}+\sqrt{p}\right)\left(\sqrt{x}-p\sqrt{p}\right)}{\left(\sqrt{x}+p\sqrt{p}\right)\left(\sqrt{x}-p\sqrt{p}\right)}=\frac{5x-5p\sqrt{px}+\sqrt{px}-p^2}{x-p^3}=$

$=\frac{5x-p^2+(1-5p)\sqrt{px}}{x-p^3}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{px}\in\mathbb{Q}\Rightarrow px$ pătrat perfect $\Rightarrow x=pk^2,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{5\sqrt{x}+\sqrt{p}}{\sqrt{x}+p\sqrt{p}}=\frac{5k\sqrt{p}+\sqrt{p}}{k\sqrt{p}+p\sqrt{p}}=\frac{5k+1}{k+p}.$

Avem $\frac{5k+1}{k+p}\neq 0$ și $\frac{5k+1}{k+p}<5\Leftrightarrow 5k+1<5k+5p\Leftrightarrow 1<5p$ adevărat, și cum $\frac{5k+1}{k+p}\in\mathbb{N}$, rezultă $\frac{5k+1}{k+p}\in\{1,2,3,4\}$.

1. $\frac{5k+1}{k+p}=1\Leftrightarrow 5k+1=k+p\Leftrightarrow 4k=p-1\Leftrightarrow k_1=\frac{p-1}{4}$

2. $\frac{5k+1}{k+p}=2\Leftrightarrow 5k+1=2k+2p\Leftrightarrow 3k=2p-1\Leftrightarrow k_2=\frac{2p-1}{3}$

3. $\frac{5k+1}{k+p}=3\Leftrightarrow 5k+1=3k+3p\Leftrightarrow 2k=3p-1\Leftrightarrow k_3=\frac{3p-1}{2}$

4. $\frac{5k+1}{k+p}=4\Leftrightarrow 5k+1=4k+4p\Leftrightarrow k_4=4p-1$

$\text{Card}\,A=4\Leftrightarrow k_1,k_2,k_3,k_4$ sunt patru numere naturale distincte.

$k_1\in\mathbb{N}\Leftrightarrow p=4m+1,\ m\in\mathbb{N}\Rightarrow k_3=\frac{3(4m+1)-1}{2}=6m+1\in\mathbb{N}$

$k_2=\frac{2(4m+1)-1}{3}=\frac{8m+1}{3}=\frac{8m-8+9}{3}=\frac{8(m-1)}{3}+3\Rightarrow m=3n+1\Rightarrow p=4(3n+1)+1=12n+5,$

$n\in\mathbb{N}$. Dar p este număr natural prim de două cifre $\Rightarrow p\in\{17,29,41,53,89\}$.

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, ianuarie 2015
Clasa a VII-a, SOLUȚII

Subiectul 2. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea

$$x^2 + 2y^2 = 2015 + 10^z.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. Dacă $x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^2 \in M_5$ sau $x^2 \in M_5 + 1$ sau $x^2 \in M_5 + 4$ și $2y^2 \in M_5$ sau $2y^2 \in M_5 + 2$ sau $2y^2 \in M_5 + 3$.

Cum $z \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2015 + 10^z \in M_5$ și singura posibilitate ca $x^2 + 2y^2 \in M_5$ este $x^2 \in M_5$ și $2y^2 \in M_5 \Rightarrow x \in M_5$ și $y \in M_5 \Rightarrow x = 5a,\ \ y = 5b,\ \ a, b \in \mathbb{N}^*$. Ecuația devine

$$25a^2 + 2 \cdot 25b^2 = 2015 + 10^z \Rightarrow 2015 + 10^z \,\vdots\, 25 \Rightarrow z = 1.$$

Altfel, pentru $z \geq 2 \Rightarrow 10^z \,\vdots\, 25 \Rightarrow 2015 + 10^z$ nedivizibil cu 25.

Obținem

$$25a^2 + 2 \cdot 25b^2 = 2025 \Rightarrow a^2 + 2b^2 = 81 \Rightarrow (a, b) \in \{(3,6), (7,4)\} \Rightarrow (x, y) \in \{(15,30), (35,20)\}.$$

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, ianuarie 2015
Clasa a VII-a, SOLUȚII

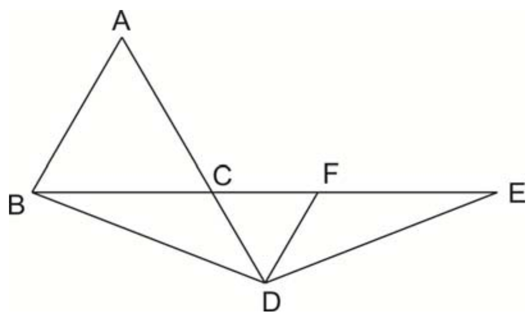
Subiectul 3. Fie triunghiul echilateral ABC. Se consideră punctele $D \in AC$ cu $C \in (AD)$ și $E \in BC$ cu $C \in (BE)$, astfel încât $[BD] \equiv [DE]$.

a) Demonstrați că $[AD] \equiv [CE]$.

b) Știind că CD este parpendiculară pe DE și că aria triunghiului ABC este a $(a > 0)$, calculați aria patrulaterului $ABDE$.

Gabriel Mîrșanu, profesor, Iași

Soluție. a)



Fie $F \in (CE)$ astfel încât $(CF) \equiv (CD) \Rightarrow m(\sphericalangle DFE) = 120^\circ$. (1)

$\triangle DBE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DEF$. (2)

(1) și (2) $\Rightarrow \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle EDF \Rightarrow \triangle BDC \equiv \triangle EDF$ (U.L.U.) (3)

Din (3) $\Rightarrow (BC) \equiv (EF)$, de unde obținem $EC = AD$.

b) Din $CD \perp DE \Rightarrow AB \perp BD$, $ABDF$ dreptunghi, iar F este mijlocul segmentului $[CE]$.

Obținem $S_{ABDF} = 4 \cdot a$, iar cum AF este mediană în $\triangle ACE \Rightarrow S_{AFE} = S_{ACF} = a$.

În final obținem $S_{ABDE} = 6 \cdot a$.

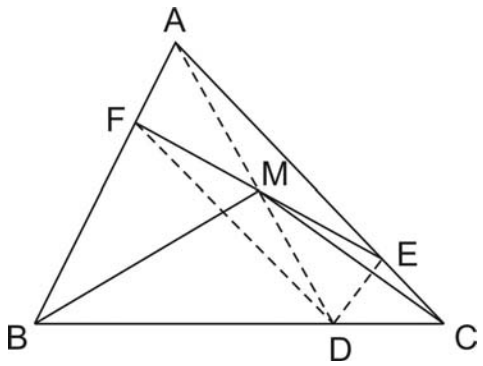
Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, ianuarie 2015
Clasa a VII-a, SOLUȚII

Subiectul 4. Se consideră triunghiul ABC și punctele $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, $M \in (EF)$ astfel încât $AF = CE$ și $EM = MF$.

Dacă $\text{aria}[MBC] = \frac{1}{2} \cdot \text{aria}[ABC]$, să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. Fie $AM \cap BC = \{D\}$ și notăm $\frac{MD}{AD} = k > 0.$



Atunci $\frac{\text{aria}[MBD]}{\text{aria}[ABD]} = k \Rightarrow \text{aria}[MBD] = k \cdot \text{aria}[ABD]$ și

$\frac{\text{aria}[MCD]}{\text{aria}[ACD]} = k \Rightarrow \text{aria}[MCD] = k \cdot \text{aria}[ACD]$, deci

$\text{aria}[MBC] = \text{aria}[MBD] + \text{aria}[MCD] = k \cdot \text{aria}[ABD] + k \cdot \text{aria}[ACD] = k \cdot \text{aria}[ABC].$

Cum din ipoteză avem $\text{aria}[MBC] = \frac{1}{2} \cdot \text{aria}[ABC]$, obținem $k = \frac{1}{2}$, deci $AM = MD.$

Din $AM = MD$ și $EM = MF$ rezultă că $AEDF$ este paralelogram, deci $AF = DE = CE$ și $AF \parallel DE.$ Prin urmare, triunghiul EDC este isoscel cu $\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ECD$ și cum $AF \parallel DE$ implică $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle EDC$ (corespondente), obținem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, deci triunghiul ABC este isoscel.