Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 8-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale prime p şi q, $p > q$ ştiind că

$$p(1 + 3pq) + q(1 - 3pq) = p^3 - q^3.$$

Cristina şi Mihai Vijdeluc

Soluţie

$p + q = (p - 1)^3$ .... **3 puncte**

$p - q = x$, atunci $2q = (x - 1)x(x + 1)$, deci $3|2q$, deci $q = 3$ .... **3 puncte**

$x = 2$ deci $p = 5$ .... **1 punct**

Problema 2. Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că:

(a) $\frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$;

(b) $\frac{1}{4a^2+bc} + \frac{1}{4b^2+ca} + \frac{1}{4c^2+ab} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$.

Enache Pătraşcu

Soluţie

(a) $\frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{b+c}{8bc} \Leftrightarrow 8abc \leq 4a^2b + 4a^2 + bc^2$ .... **2 puncte**

$\Leftrightarrow b(2a - c)^2 + a(2a - b)^2 \geq 0$ .... **2 puncte**

(b) $\frac{1}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac})$, deci $S \leq \frac{1}{4}\sum \frac{1}{ab}$ .... **1 punct**

Dar $\sum \frac{1}{ab} \leq \sum \frac{1}{a^2}$, finalizare .... **2 puncte**

Problema 3. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB||CD$, $AB = 8, BC = 12, CD = 4$ şi $m(\hat{B}) = 60°$. Considerăm punctul $R \in (CB)$ astfel încât $CR = 4$ şi punctul E astfel încât $EA \perp (ABC)$ şi $EA = x$.

(a) Dacă $d(E, BC) = 8$, să se afle x;

(b) Să se afle distanţa de la punctul D la planul (EAR).

***

Soluţie

(a) Dacă T este piciorul perpendicularei din A pe BC, atunci $AT = 4\sqrt{3}$ .. **2 puncte**
$EA = 4$ .... **2 puncte**

(b) $d(D, (EAR)) = DR$ .... **2 puncte**

$DR = 4\sqrt{3}$ ....**1 punct**

Problema 4. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ şi $AB \neq AD$.

(a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$, $\angle BCD$ şi dreapta BD sunt concurente într-un punct S.

(b) Dacă punctele $R \in (AB), T \in (AD), V \in (BC), P \in (CD)$ sunt alese astfel încât $BR = TD$ şi $BV = PD$ iar E, O, F sunt mijloacele segmentelor $(RT), (BD)$, respectiv (VP), arătaţi că planele (EOF) şi (ASC) sunt paralele.

Enache Pătraşcu, Cornel Noană

Soluţie

Fie AS bisectoarea unghiului BAD, atunci $\frac{SB}{SD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{CB}{CD}$ .... **1 punct**
deci CS este bisectoarea lui BCD şi bisectoarele unghiurilor BAD, BCD şi BD sunt concurente în S .... **2 puncte**

(b) Fie N simetricul lui T faţă de O. $ON = OD, OT = ON$ deci $BNDT$ paralelogram, deci $BN || AD, BN = AD$. Deci EO este linie mijlocie în RTN, deic $EO || RN$, deci $EO || AS$. Analog $EO || SC$, deci $(EOS) || (ASC)$ .... **4 puncte**