



Șimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudețean de Matematică "Teodor Topan"  
Ediția a IX-a

CLASA A X-A

**Problema 1** Fie  $\varepsilon \neq 1$  o rădăcină de ordinul 3 a unității, iar  $z$  un număr complex pentru care  $|z - \varepsilon| \leq 1$  și  $|z - \varepsilon^2| \leq 1$ . Arătați că  $|z| \leq 1$ .

**Problema 2** Fie  $a$  un număr real cu  $0 < a < 1$ . Rezolvați ecuația

$$x^{a^x} = a^{x^a}.$$

**Problema 3** a) În figura 1 sunt reprezentate simultan graficele a trei trinoame de gradul al doilea. Pot fi acestea graficele trinoamelor  $ax^2 + bx + c$ ,  $bx^2 + cx + a$  respectiv  $cx^2 + ax + b$  pentru  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ? Justificați răspunsul.

b) Aceași întrebare pentru figura 2. Justificați răspunsul.

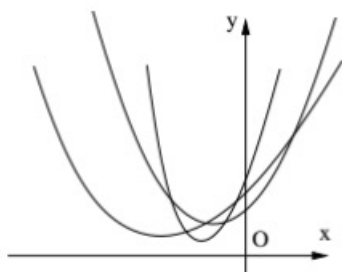


figura 1

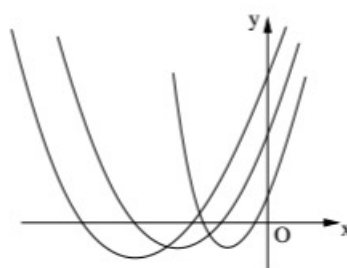


figura 2

**Problema 4** Fie  $n$  un număr natural nenul și  $z_1, \dots, z_n$  numere complexe pentru care  $\sum_{j=1}^n |z_j| = 1$ . Arătați că există  $S$  o submulțime a lui  $\{1, 2, \dots, n\}$  pentru care  $|\sum_{k \in S} z_k| \geq \frac{1}{4}$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.