Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Teodor Topan”
Ediţia a IX-a

CLASA A X-A - Barem orientativ de corectare

Problema 1 *Fie* $\varepsilon \neq 1$ *o rădăcină de ordinul 3 a unităţii, iar* z *un număr complex pentru care* $|z-\varepsilon| \leq 1$ *şi* $|z-\varepsilon^2| \leq 1$*. Arătaţi că* $|z| \leq 1$*.*

Soluţie. Din $|z-\varepsilon| \leq 1$ avem prin ridicare la pătrat că $|z-\varepsilon|^2 \leq 1$ de unde obţinem $(z-\varepsilon)(\overline{z}-\overline{\varepsilon}) \leq 1 \Leftrightarrow |z|^2 \leq \varepsilon^2 \cdot z + \varepsilon \cdot \overline{z}$ folosind că $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^2$. Deci $|z|^2 \leq \varepsilon^2 \cdot z + \varepsilon \cdot \overline{z}$ şi în mod analog din $|z-\varepsilon^2| \leq 1$ obţinem $|z|^2 \leq \varepsilon \cdot z + \epsilon^2 \cdot \overline{z}$. **. . . 3 puncte**

Adunând cele două relaţii şi folosind faptul că $\varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = 0$ avem că $|z|^2 \leq -\frac{z+\overline{z}}{2} = -Re(z)$. Dacă $z = x + iy$ obţinem deci $x^2 + y^2 \leq -x \Rightarrow x^2 \leq -x \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow |z| \leq 1$.

. . . 4 puncte

Problema 2 *Fie* a *un număr real cu* $0 < a < 1$*. Rezolvaţi ecuaţia*

$$x^{a^x} = a^{x^a}.$$

Soluţie.

Fie x o soluţie a ecuaţiei. Observăm că $x > 0$. **. . . 1 punct**

Logaritmând ecuaţia se obţine $a^x \ln(x) = x^a \ln(a)$, care se scrie echivalent ca şi $a^x \log_a(x) = x^a$. **. . . 2 puncte**

Membrul stâng este strict descrescător, iar membrul drept este strict crescător, deci există cel mult o soluţie. Se observă uşor că $x = a$ verifică ecuaţia, deci aceasta este soluţia unică.

. . . 4 puncte

Problema 3 *a) În* **figura 1** *sunt reprezentate simultan graficele a trei trinoame de gradul al doilea. Pot fi acestea graficele trinoamelor ax^2+bx+c, bx^2+cx+a respectiv cx^2+ax+b pentru $a,b,c\in\mathbb{R}$? Justificaţi răspunsul.*

b)Aceeaşi întrebare pentru **figura 2.** *Justificaţi răspunsul.*

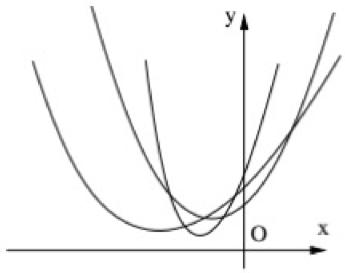

figura 1

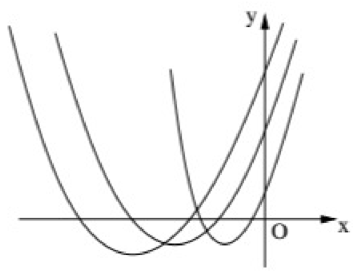

figura 2

Soluţie.

a) Nu este posibil. Din figură observăm că cele trei trinoame se intersectează în 6 puncte diferite, pe când graficele trinoamelor ax^2+bx+c, bx^2+cx+a şi cx^2+ax+b ar trebui să se intersecteze în punctul $(1, a+b+c)$.

. . . 3 puncte

b) Nu este posibil. Din grafic, se vede că toate trinoamele au câte două rădăcini reale. Prin urmare, $a^2>4bc, b^2>4ca, c^2>4ab$. Ramurile parabolelor sunt îndreptate în sus, deci $a>0, b>0, c>0$. Înmulţind inegalităţile obţinute, se ajunge la contradicţia $a^2b^2c^2>64a^2b^2c^2$.

. . . 4 puncte

Problema 4 *Fie n un număr natural nenul şi $z_1,\dots,z_n$ numere complexe pentru care $\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|=1$. Arătaţi că există S o submulţime a lui $\{1,2,\dots,n\}$ pentru care $|\sum\limits_{k\in S} z_k|\geq\frac{1}{4}$.*

Soluţie. Notăm $z_k=x_k+iy_k$. Din $\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|=1$, folosind inegalitatea triunghiului avem că $1\leq(|x_1|+|y_1|+\dots|x_n|+|y_n|)$. Inegalitea se rescrie în mod echivalent ca

$$1\leq\sum_{x_k<0}|x_k|+\sum_{x_k>0}|x_k|+\sum_{y_k<0}|y_k|+\sum_{y_k>0}|y_k|.$$

. . . 3 puncte

Din principiul cutiei, măcar una din cele patru sume este cel puţin egală cu $\frac{1}{4}$. Folosind simetria faţă de zero a modulului, putem presupune fără a restrânge generalitatea că $\frac{1}{4} \leq \sum\limits_{x_k>0} |x_k| = |\sum\limits_{x_k>0} x_k|$. Atunci

$$|\sum_{x_k>0} z_k| \geq |\sum_{x_k>0} x_k| \geq \frac{1}{4}.$$

. . . 4 puncte