Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a IX-a

CLASA A XI-A

Problema 1 *Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcţie descrescătoare şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu $a_0>0$ şi $a_{n+1}=a_n+f(a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, însă $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.*

Problema 2 *Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $det(A)\neq 0$. Arătaţi că dacă există S o mulţime finită de numere complexe astfel încât $\forall m\in\mathbb{N}$, A^m are toate elementele în S, atunci există un număr natural k pentru care $A^k=I_n$.*

Problema 3 *Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice care comută şi au proprietatea că $A^r=B^s=I_n$, unde r,s sunt numere naturale impare. Demonstraţi că $A+B$ este inversabilă.*

Problema 4 *a) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu proprietatea că oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$. Implică această proprietate faptul că $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent? Justificaţi răspunsul.*

b) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu proprietatea că oricare ar fi funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+f(n)}-a_n)=0$. Implică această proprietate faptul că $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent? Justificaţi răspunsul.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*