Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a IX-a

CLASA A XII-A

Problema 1 *Fie* $(G, *)$ *un grup şi* H *un subgrup al lui* G, $H \neq G$. *Fie* $f : G \to G$ *şi* $g : G \to G$ *două morfisme de grupuri.*
a) Arătaţi că dacă $f(x) = g(x) \forall x \in G \setminus H$ *atunci* $f(x) = g(x) \forall x \in G$.
b) Dacă $\{e\} \neq H \neq G$, *este adevărat că dacă* $f(x) = g(x) \forall x \in H$, *atunci* $f(x) = g(x) \forall x \in G$*?*

Problema 2 *Fie* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *o funcţie şi* $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o primitivă a sa cu* $F(0) = 0$. *Arătaţi că ecuaţia* $2x - F(x) = 1$ *are soluţie unică în intervalul* $[0, 1]$.

Problema 3 *a) Arătaţi că produsul tuturor elementelor dintr-un grup abelian este egal cu produsul elementelor de ordin doi ale grupului (unde considerăm produsul elementelor din mulţimea vidă egal cu elementul neutru e).*

b)Fie $(G, \cdot)$ *un grup abelian finit. Spunem că subgrupul* H *al lui* G *are proprietatea* (P) *dacă* $G \neq H$ *şi produsul elementelor din* H *este egal cu produsul elementelor din* $G \setminus H$. *Să se arate că dacă* G *are un subgrup cu proprietatea* (P), *atunci orice subgrup al lui* G, *diferit de* G, *are proprietatea* (P).

Problema 4 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $f \circ f$ *admite primitive. Să se arate că* f *admite primitive.*

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*