Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a IX-a

CLASA A XII-A - Barem orientativ de corectare

Problema 1 *Fie* $(G, *)$ *un grup şi* H *un subgrup al lui* G*,* $H \neq G$*. Fie* $f : G \to G$ *şi* $g : G \to G$ *două morfisme de grupuri.*
a) Arătaţi că dacă $f(x) = g(x) \forall x \in G \setminus H$ *atunci* $f(x) = g(x) \forall x \in G$*.*
b) Dacă $\{e\} \neq H \neq G$*, este adevărat că dacă* $f(x) = g(x) \forall x \in H$*, atunci* $f(x) = g(x) \forall x \in G$*?*

Soluţie. a) Dacă presupunem contrariul, atunci exista $x \in H$ pentru care $f(x) \neq g(x)$. Fie y un element din $G - H$ (care există deoarece $H \neq G$). Atunci $x * y \in G - H$, iar conform presupunerii, $f(x) * f(y) \neq g(x) * g(y) \Rightarrow f(x * y) \neq g(x * y)$, care contrazice ipoteza.

. . . 4 puncte

b) Răspunsul este negativ: un contraexemplu este $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $H = \{-1, 1\}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$. **. . . 3 puncte**

Problema 2 *Fie* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *o funcţie şi* $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o primitivă a sa cu* $F(0) = 0$*. Arătaţi că ecuaţia* $2x - F(x) = 1$ *are soluţie unică în intervalul* $[0, 1]$.

Soluţie. f admite primitive, prin urmare, f are proprietatea lui Darboux. Definim funcţia $G(x) = 2x-F(x)-1$. $G'(x) = 2-f(x) \geq 1 > 0$, prin urmare G este strict crescătoare, deci ecuaţia $G(x) = 0$ are cel mult o soluţie.

. . . 3 puncte

f admite primitive, prin urmare, f are proprietatea lui Darboux.
Din teorema lui Lagrange, $\frac{F(1)-F(0)}{1-0} = f(c)$, pentru un număr real $c \in (0, 1)$. Prin urmare avem că $F(1) \leq 1$.
$G(0) = -1 < 0$ şi $G(1) = 1 - F(1) \geq 0$, deci din continuitatea lui G, avem că $G(x) = 0$ are o soluţie în intervalul $[0, 1]$. Ea este unică din observaţiile precedente. **. . . 4 puncte**

Problema 3 *a) Arătaţi că produsul tuturor elementelor dintr-un grup abelian este egal cu produsul elementelor de ordin doi ale grupului (unde considerăm produsul elementelor din mulţimea vidă egal cu elementul neutru e).*

b)Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea (P) dacă $G \neq H$ şi produsul elementelor din H este egal cu produsul elementelor din $G \setminus H$. Să se arate că dacă G are un subgrup cu proprietatea (P), atunci orice subgrup al lui G, diferit de G, are proprietatea (P).

Soluţie. a) Dacă notăm cu A mulţimea care conţine toate elementele de ordin diferit de 2, atunci orice element din A are inversul diferit de el însuşi, deci elementele din A pot fi grupate în perechi disjuncte (x, x^{-1}) şi evident produsul tuturor elementelor din A este e.

Deci
$$\prod_{x\in G} x = \prod_{x\in A} x \cdot \prod_{x\in G, ord(x)=2} x = \prod_{x\in G, ord(x)=2} x.$$

. . . 2 puncte

b) Dacă grupul commutativ finit G are proprietatea (P), atunci
$$\prod_{x\in H} x = \prod_{x\in G\setminus H} x.$$

Înmulţind cu $\prod\limits_{x\in H} x$, se obţine
$$\left(\prod_{x\in H} x\right)^2 = \prod_{x\in G} x \Longleftrightarrow \prod_{x\in H, ord(x)=2} x^2 = \prod_{x\in G} x,$$

deci $e = \prod\limits_{x\in G} x$.

. . . 3 puncte

Fie acum $M \neq G$ un subgrup oarecare al lui G. Este evident că $e = \left(\prod\limits_{x\in M, ord(x)=2} x\right)^2 = \left(\prod\limits_{x\in M} x\right)^2$.

Deci $\prod\limits_{x\in G} = \left(\prod\limits_{x\in M} x\right)^2$. Simplificând cu $\prod\limits_{x\in M} x$, se obţine concluzia dorită.

. . . 2 puncte

Problema 4 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $f \circ f$ *admite primitive. Să se arate că* f *admite primitive.*

Soluţie. Din $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, obţinem $|f(f(x)) - f(f(y))| \geq |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, de unde rezultă că $f \circ f$ este injectivă.

. . . 2 puncte

Funcţia $f \circ f$ admite primitve, deci $f \circ f$ are proprietatea lui Darboux. Cele două rezultate implică faptul că $f \circ f$ este strict monotonă.
$f \circ f$ strict monotonă şi are proprietatea lui Darboux, deci $f \circ f$ este continuă.

. . . 3 puncte

Din relaţia $|f(f(x)) - f(f(y))| \geq |f(x) - f(y)|$ avem că f este continuă şi deci admite primitive.

. . . 2 puncte