Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie, 2014

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a IX-a

CLASA A IX-A - Barem orientativ de corectare

Problema 1 *Fie n un număr natural nenul şi $a_1, \dots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 + \dots + a_n = n$. Arătaţi că $a_1^4 + \dots + a_n^4 \geq n$.*

Soluţie. Din inegalitatea Cauchy (sau inegalitatea dintre media pătratică şi media aritmetică) avem că

$$\left(a_1^2 + \dots + a_n^2\right)(1 + 1 + \dots + 1) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2,$$

deci $a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq n$. **. . . 4 puncte**

Aplicând din nou inegalitatea lui Cauchy, obţinem

$$\left(a_1^4 + \dots + a_n^4\right)(1 + \dots + 1) \geq \left(a_1^2 + \dots + a_n^2\right)^2 \geq n^2,$$

de unde rezultă concluzia. **. . . 3 puncte**

Problema 2 *Fie a, b, c numere naturale care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi. Arătaţi că:*

a) dacă ecuaţia $x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 1)x + ab + bc + ac = 0$ are rădăcini întregi, atunci triunghiul este echilateral.

b) dacă ecuaţia $x^2 + (2ab + 1)x + a^2 + b^2 = c^2$ are rădăcini întregi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Soluţie. a) Dacă ecuaţia are rădăcini întregi, atunci $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ac)$ este un pătrat perfect mai mic decât $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2$ de aceeaşi paritate.

. . . 2 puncte

Obţinem deci $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - 4(ab + bc + ca) \leq (a^2 + b^2 + c^2 - 1)^2$. Ultima inegalitate este echivalentă cu

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0,$$

de unde se obţine concluzia. **. . . 1 punct**

b) Dacă $a^2 + b^2 > c^2$, atunci $(2ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2 - c^2)$ este un pătrat perfect impar, mai mic decât $(2ab + 1)^2$.

Atunci $(2ab+1)^2 - 4(a^2+b^2-c^2) \leq (2ab-1)^2$, deci $c^2 \leq (a-b)^2$ de unde se obţine o contradicţie. Analog se obţine o contradicţie pentru $c^2 > a^2 + b^2$.

. . . 4 puncte

Problema 3 *Date fiind* 6 *puncte distincte in interiorul unui disc de rază* 1*, arătaţi că există două dintre ele situate la distanţa cel mult egala cu* 1*.*

Soluţie.

Considerăm punctele $A_1, \ldots, A_6$ ordonate in sens trigonometric şi O centrul discului. Atunci, deoarece $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \angle A_4OA_5 + \angle A_5OA_6 + \angle A_6OA_1 = 360°$ există i, astfel încât $\angle A_iOA_{i+1} \leq 60°$.

. . . 5 puncte

Deci A_iA_{i+1} nu este cea mai mare latură în triunghiul OA_iA_{i+1}, de unde rezultă concluzia.

. . . 2 puncte

Problema 4 *Fie a un număr natural nenul. Demonstraţi că a este pătrat perfect dacă şi numai dacă oricare ar fi $b \in \mathbb{N}^*$, există un număr $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + b \cdot c$ este pătrat perfect.*

Soluţie. Să presupunem că $a = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ si considerăm $b \in \mathbb{N}^*$ un număr nenul oarecare. Atunci, observăm că dacă alegem $c = 2k + b$, avem $a + b \cdot c = k^2 + b \cdot (2k + b) = k^2 + 2kb + b^2 = (k + b)^2$, un pătrat perfect.

. . . 3 puncte

Pentru implicaţia inversă, presupunem că a nu este un pătrat perfect. Atunci, a conţine în descompunerea sa un factor prim p la o putere impară. Deci, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^{2k-1} \mid a$, dar $p^{2k} \nmid a$.

. . . 2 puncte

Din ipoteză ştim că există un număr natural nenul c, astfel încât $a + p^{2k} \cdot c$ este un pătrat perfect. Dar aceasta este o contradiţie, deoarece $p^{2k-1} \mid a + p^{2k} \cdot c$ dar $p^{2k} \nmid a + p^{2k} \cdot c$.

. . . 2 puncte