# 1 Clasa a V-a - enunţuri

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Dacă $x$, $y$, $z$ sunt numere naturale astfel încât $x + y = 29$ şi $y + 3 \cdot z = 21$, calculaţi $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z$.

   *Gazeta Matematică nr. 2/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (b) Un număr natural este cu 44 mai mare decât altul. Aflaţi numerele ştiind că împărţind numărul mai mare la cel mic obţinem câtul 7 şi restul 2.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (c) Mai mulţi copii vor să cumpere un cadou unui coleg, de ziua acestuia. Dacă fiecare participă cu câte 20 de lei, nu ajung 5 lei. Dacă fiecare participă cu câte 30 de lei, sunt în plus 25 de lei. Câţi copii vor să cumpere cadoul şi cât costă acesta?

   *Gazeta Matematică nr. 4/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (d) Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care satisfac egalitatea $\overline{ab} = 2a + 3b$.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

2. Aflaţi numărul de pagini al unei cărţi ştiind că pentru numerotarea paginilor sale s-a folosit de exact 170 de ori cifra 5.

   *Marius Perianu*

3. Se numeşte număr *simetric* un număr de forma $\overline{abcba}$, unde $a$, $b$, $c$ sunt cifre distincte.

   a) Scrieţi cel mai mare şi cel mai mic număr simetric.

   b) Determinaţi câte numere simetrice există.

   c) Calculaţi suma tuturor numerelor simetrice care au suma cifrelor 29 şi au ultima cifră 6.

   *Adriana Olaru, Călăraşi*

# 2 Clasa a V-a - soluţii

**1.** (a) 50. (b) 51 şi 7. (c) 3 copii; 65 lei. (d) 14 şi 28.

**2.** Pentru numerotarea paginilor de la 1 la 99 se foloseşte de 20 de ori cifra 5 (de 10 ori apare pe poziţia zecilor şi de 10 ori pe poziţia unităţilor); la fel, tot de 20 de ori se foloseşte şi pentru numerotarea paginilor de la 100 la 199 sau de la 200 la 299 sau de la 300 la 399 sau de la 400 la 499, deci pentru a numerota paginile de la 1 la 499 se foloseşte de 100 de ori cifra 5. Ne rămâne să mai folosim cifra 5 de 70 de ori.

Pentru numerotarea paginilor de la 500 la 599, cifra 5 apare de 10 ori pe poziţia unităţilor, de 10 ori pe poziţia zecilor şi de 100 de ori pe poziţia sutelor; în total de 120 de ori, deci cartea are mai puţin de 599 de pagini. Pentru numerotarea paginilor de la 500 la 549 se foloseşte încă de 55 de ori cifra 5, deci mai trebuie să o folosim de 15 ori. Se obţine că numărul de pagini al cărţii este 558.

**3.** (a) 10201; 98789. (b) Cifra $a$ poate lua 9 valori (cifrele de la 1 la 9), cifra $b$ poate lua tot 9 valori (oricare dintre cifrele de la 0 la 9, mai puţin cea folosită pentru $a$), iar cifra $c$ poate lua 8 valori (oricare dintre cifrele de la 0 la 9, mai puţin cele folosite pentru $a$ şi $b$). Sunt posibile $9 \times 9 \times 8 = 648$ combinaţii, deci sunt 648 de numere simetrice.

(c) $6 + b + c + b + 6 = 29$ conduce la $2b + c = 17$, cu soluţiile $b = 4$, $c = 9$ sau $b = 5$, $c = 7$ sau $b = 6$, $c = 5$ sau $b = 7$, $c = 3$ sau $b = 8$, $c = 1$. Cum cifra 6 este deja folosită, varianta $b = 6$, $c = 5$ nu convine. Rămân numerele 64946, 65756, 67376, 68186, care au suma 266 264.

# 3 Clasa a VI-a - enunţuri

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Determinaţi cel mai mic număr natural de forma $\overline{aabb}$ care este divizibil cu 19.

   *Gazeta Matematică nr. 5/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (b) Determinaţi numerele naturale nenule $x$ şi $y$ pentru care $xy + x^2$ este un divizor al numărului 74.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (c) Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $a = 3^{2015} + 3^{2014} + 3^{2013} + 3^{2012}$.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (d) Determinaţi numerele naturale $x$, $y$, $z$ pentru care $7^x + 3^y + 2^z = 293$.

   *Gazeta Matematică nr. 2/2014, Suplimentul cu exerciţii*

2. La un concurs de matematică sunt premiaţi 10 concurenţi, cu sume diferite de bani. Fiecare dintre primii opt premianţi primeşte cât următorii doi clasaţi. Aflaţi ce sumă de bani s-a folosit, dacă primul clasat a primit 280 de lei.

   *Luminiţa Bucureşteanu*

3. În clasa a VI-a A din şcoala noastră sunt elevi în vârstă de 12 sau 13 ani. Suma vârstelor lor este egală cu 320 ani. Aflaţi numărul de elevi din clasă, precum şi câţi dintre ei au 12 ani.

   *Marius Perianu*

# 4 Clasa a VI-a - soluţii

**1.** (a) 3344. (b) $x = 1$, $y = 1$ sau $x = 1$, $y = 36$ sau $x = 1$, $y = 73$ sau $x = 2$, $y = 35$. (c) 4 (penultima) şi 0 (ultima). (d) $x = 2$, $y = 5$, $z = 0$.

**2.** Notând cu $n$ suma primită de cel de-al nouălea clasat şi cu $z$ suma celui de-al zecelea, obţinem că elevii clasaţi pe locurile 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 au primit sumele $2n + z$, $3n + 2z$, $5n + 3z$, $8n + 5z$, $13n + 8z$, $21n + 13z$, respectiv $34n + 21z$. Rezultă $34n + 21z = 280$, de unde $n = 7$ şi $z = 2$. Se obţine că suma totală pentru premiere a fost de 726 lei.

**3.** Fie $a$ numărul de elevi de 12 ani şi $b$ numărul de elevi de 13 ani; atunci $12a + 13b = 320$.

Întrucât $12a + 12b < 12a + 13b = 320$, rezultă $12(a + b) < 320$, de unde $a + b \leq 26$.

La fel, cum $13a + 13b > 12a + 13b = 320$, rezultă $13(a + b) > 320$, de unde $a + b \geq 25$.

Aşadar, numărul de elevi din clasă, care este $a + b$, poate fi 25 sau 26. Trebuie să confirmăm aceste posibilităţi găsind o configuraţie (număr de elevi de 12 ani, respectiv 13 ani) pentru fiecare caz.

Dacă $a + b = 25$, rezultă $320 = 12a + 13b = 12a + 12b + b = 12\,(a + b) + b = 12 \cdot 25 + b = 300 + b$, deci $b = 20$ şi $a = 5$.

Dacă $a + b = 26$, rezultă $320 = 12a + 13b = 12a + 12b + b = 12\,(a + b) + b = 12 \cdot 26 + b = 312 + b$, deci $b = 8$ şi $a = 18$.

# 5 Clasa a VII-a - enunţuri

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Un număr natural $n$ împărţit la 7 dă restul 3 şi împărţit la 9 dă restul 5. Care este restul împărţirii lui $n$ la 63?

   *Gazeta Matematică nr. 5/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (b) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{3}=\frac{c+a}{5}$.

   *Gazeta Matematică nr. 3/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (c) Aflaţi lungimile laturilor unui dreptunghi (care nu este pătrat!) exprimate prin numere naturale, ştiind că raportul dintre perimetrul dreptunghiului şi aria sa este $0,(6)$.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (d) Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10, pentru care $\overline{abc}+a+b+c$ este cub perfect.

   *Gazeta Matematică nr. 9/2014, Suplimentul cu exerciţii*

2. Determinaţi cel mai mic număr natural $n$ pentru care numărul $n\cdot 10^4+1$ este divizibil cu 2013.

   *Costel Anghel, Negreni, Olt*

3. Patrulaterul convex $ABCD$ are unghiurile $\widehat{ADC}$ şi $\widehat{BCD}$ necongruente, iar bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{ABC}$ se intersectează în mijlocul laturii $[CD]$. Demonstraţi că:

   a) $AD \parallel BC$.

   b) $AB = AD + BC$.

   *Maria şi Dorel Miheţ, Timişoara*

# 6 Clasa a VII-a - soluţii

**1.** (a) 59. (b) 203, 406, 609. (c) 4 şi 12. (d) 121, 198, 207, 329, 720.

**2.** Deoarece $2013\cdot 7 = 14\,091$ şi $2013 \mid 10^4n+1$, rezultă că $2013 \mid 10^4n+1-14091$, adică $2013 \mid 10^4n-14090$. Dar $10^4n-14090 = 10\,(1000n-1409)$ şi $(2013,10)=1$, deci 2013 divide $1000n-1409$.

Întrucât 2013 divide pe $6039 = 3\cdot 2103$, rezultă că 2013 divide pe $1000n-1409+6039 = 1000n+4630 = 10\,(100n+463)$, deci $2013 \mid 100n+463$.

Atunci 2013 divide şi pe $100n+463-2013 = 100n-1550 = 10\,(10n-155)$, deci $2013 \mid 10n-155$.

Cum 2013 divide pe $10065 = 5\cdot 2013$, rezultă că 2013 divide pe $10n-155+10065 = 10\,(n+991)$, deci 2013 divide pe $n+991$. Cel mai mic număr natural $n$ cu această proprietate se obţine pentru $n+991=2013$, adică $n=1022$.

**3.** a) Presupunem că $AD$ şi $BC$ se intersectează într-un punct $P$. Notând cu $M_1, M_2, M_3$ proiecţiile lui $M$ pe dreptele $AB, AD, BC$, respectiv, şi ţinând cont că $M$ se află pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAD}$, respectiv $\widehat{ABC}$, rezultă că $MM_1 = MM_2 = MM_3$. Va rezulta că $M$ aparţine bisectoarei unghiului $P$ al triunghiului $PCD$, deci acesta este isoscel cu $PC = PD$, în contradicţie cu ipoteza. Aşadar $AD \parallel BC$ .

b) Din $AD \parallel BC$ rezultă că unghiurile $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{ABC}$ sunt suplementare, deci $m(\widehat{AMB}) = 90°$. Notând cu $N$ mijlocul segmentului $[AB]$ avem $MN = \frac{AB}{2}$, ca mediană corespunzătoare ipotenuzei, şi pe de altă parte $MN = \frac{AD+BC}{2}$, deci $AB = AD + BC$.

# 7 Clasa a VIII-a - enunţuri

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Fie $a$, $b$, $c$, $d$ numere reale astfel încât $a+b=53$ şi $c+d=38$. Calculaţi $ad+bc+ac+bd$.

   *Gazeta Matematică nr. 2/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (b) Numerele reale $a$, $b$, şi $c$ verifică relaţia $a^2+2b^2+2c^2-2ab+2bc-4c+4=0$. Calculaţi suma $a^{2013}+b^{2013}+c^{2014}$.

   *Gazeta Matematică nr. 5/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (c) Determinaţi cea mai mică valoare a expresiei $E=\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{9y^2+6y+10}$, unde $x$ şi $y$ sunt numere reale oarecare.

   *Gazeta Matematică nr. 4/2014, Suplimentul cu exerciţii*

   (d) Aflaţi aria trapezului $ABCD$, cu $AB \| CD$, ştiind că $AB=14$ cm, $BC=6$ cm, $CD=7$ cm, $AD=5$ cm.

   *Gazeta Matematică nr. 3/2014, Suplimentul cu exerciţii*

2. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{ab}=(10-a)\cdot(10-b)$.

   *Costel Anghel, Negreni, Olt*

3. Numărul $N$, format din patru cifre mai mici sau egale cu 8, este pătrat perfect. Aflaţi $N$, ştiind că mărind fiecare cifră a sa cu o unitate, se obţine un nou pătrat perfect.

   *Marius Perianu*

# 8 Clasa a VIII-a - soluţii

**1.** (a) 2014. (b) 0. (c) 4. d) $18\sqrt{6}$ cm$^2$.

**2.** Avem $10a+b=100-10a-10b+ab$, de unde $20a-ab=100-11b$. Atunci $a=\dfrac{100-11b}{20-b}$ şi, cum $a\in\mathbb{N}$, rezultă $20-b \mid 100-11b$. Se obţine $20-b \mid 120$, de unde $b\in\{0,5,8\}$, pentru care se găsesc soluţiile $\overline{ab}=18$ sau $\overline{ab}=35$ sau $\overline{ab}=50$.

**3.** Fie $M$ numărul format din $N$ prin mărirea cu o unitate a cifrelor sale. Atunci există numerele naturale $a$ şi $b$, $a>b$, astfel încât $M=a^2$ şi $N=b^2$. Cum cifrele lui $N$ sunt mai mici sau egale cu 8, rezultă că: $M-N=1111 \Rightarrow (a-b)(a+b)=1111=11\cdot 101$.

Cazul 1. $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=1111 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=556 \\ b=555 \end{cases} \Rightarrow N=555^2=308\,025$, nu convine (are şase cifre).

Cazul 2. $\begin{cases} a-b=11 \\ a+b=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=56 \\ b=45 \end{cases} \Rightarrow N=45^2=2025$ - soluţie.