Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 8-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale prime p şi q, $p > q$ ştiind că

$$p(1+3pq)+q(1-3pq)=p^3-q^3.$$

Problema 2. Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că:

(a) $\frac{a}{4a^2+bc} \leq \frac{1}{8}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$;

(b) $\frac{1}{4a^2+bc}+\frac{1}{4b^2+ca}+\frac{1}{4c^2+ab} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$.

Problema 3. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB||CD$, $AB = 8, BC = 12, CD = 4$ şi $m(\hat{B}) = 60°$. Considerăm punctul $R \in (CB)$ astfel încât $CR = 4$ şi punctul E astfel încât $EA \perp (ABC)$ şi $EA = x$.

(a) Dacă $d(E, BC) = 8$, să se afle x;

(b) Să se afle distanţa de la punctul D la planul (EAR).

Problema 4. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ şi $AB \neq AD$.

(a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$, $\angle BCD$ şi dreapta BD sunt concurente într-un punct S.

(b) Dacă punctele $R \in (AB), T \in (AD), V \in (BC), P \in (CD)$ sunt alese astfel încât $BR = TD$ şi $BV = PD$ iar E, O, F sunt mijloacele segmentelor $(RT), (BD)$, respectiv (VP), arătaţi că planele (EOF) şi (ASC) sunt paralele.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte