Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2015

Ediţia a 14-a

Focşani, Ianuarie 2015

Clasa a 9-a

Problema 1. Se consideră o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietăţile:

(i) $1 \in G$;
(ii) dacă $x \in G$ atunci $\sqrt{x+2} \in G$;
(iii) dacă $\sqrt{x+3} \in G$ atunci $x+4 \in G$.

Arătaţi că $\sqrt{2015} \in G$.

Problema 2. (a) Fie x, y numere reale, $x > y$. Arătaţi că

$$x^3 + x^2(y-4) - x(y^2-4) \geq y^3 - 4y^2 + 4y.$$

(b) Arătaţi că partea întreagă a numărului $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{128}$ este 5.

Problema 3. (a) Dacă $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \geq 2015, a \neq 0$ arătaţi că $a < 0$.

(b) Fie $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ şi $(c_n)_{n \geq 0}$ progresii aritmetice cu termenii pozitivi şi ecuaţiile

$$E_n : a_n x^2 - 2b_n x + c_n = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $M = \{n \in \mathbb{N} : E_n \text{ are soluţii reale}\}$ are 2015 elemente, arătaţi că $2015 \notin M$.

Problema 4. Fie triunghiul ABC şi M un punct interior acestuia. Notăm cu $\{S\} = AM \cap BC$, $\{N\} = BM \cap AC$, $\{P\} = CM \cap AB$ şi $\{O\} = AM \cap PN$. Dacă $AM = 2MS$ şi $\frac{SB}{SC} = x$. Să se arate că:

(a) $\overrightarrow{AN} = \frac{2x}{3x+1}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{x+3}\overrightarrow{AB}$;
(b) Mijloacele segmentelor $(AB), (AC)$ şi O sunt trei puncte coliniare.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte