Concursul interjudeţean de matematică „Misterele Matematicii"
Ediţia a X a, 27 martie 2016, Vaslui
Clasa a IV-a

Problema 1
Se știe că a, b , c sunt trei numere naturale astfel încât $a + b = 21$ și $2b + c = 31$.
a) Calculați suma $3a + 7b + 2c$;
b) Calculați numerele a, b, c, în cazul în care două dintre ele sunt egale.

(prof. Ciomaga Mihai)

Soluție:
Oficiu……………………………………………………………………………2 pc
a) $a + b = 21 \Rightarrow 3a + 3b = 63$;
$2b + c = 31 \Rightarrow 4b + 2c = 62$;
$3a + 7b + 2c = (3a + 3b) + (4b + 2c) = 63 + 62 = 125$……………………………………….3 pc
b) $a + b = 21 \Rightarrow a \neq b$; $2b + c =31 \Rightarrow b \neq c$………………………………………………2 pc
Dacă $a = c$, atunci din $b + c =21$ și $2b + c = 31 \Rightarrow b = 10$;……………………………….2 pc
$a = c = 11$……………………………………………………………………………..1 pc

Problema 2
Se consideră şirul numerelor naturale de 10 cifre, fiecare număr având suma cifrelor egală cu 20.
a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr din acest șir;
b) Dacă numerele din șir ar fi scrise în ordine crescătoare, aflați numerele de pe locurile 10, respectiv 20.

(prof. Ciomaga Mihai)

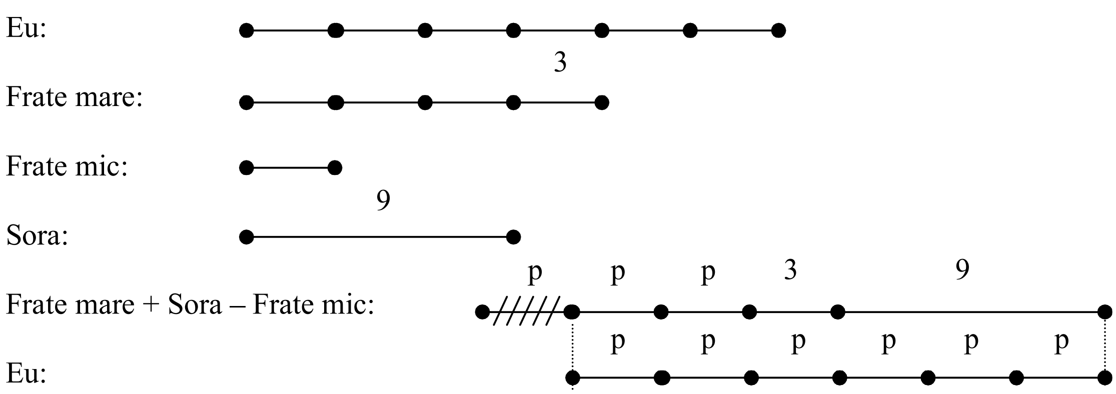
Soluție:
Oficiu…………………………………………………………………………..…2 pc
a) Cel mai mic dintre numere este 10…0199 (6 de zero), iar cel mai mare este
9920…0 (7 de zero);……………………………………………………………..….2 pc
b) Primul număr din şir este 10…0199 (6 de zero);
Următoarele două sunt 10…0289 (6 de zero),
10…0298 ;
Următoarele trei sunt 10…0379,
10…0388,
10…0397;
Următoarele patru sunt 10…0469,
10…0478,
10…0487,
10…0496, al 10-lea număr din şir;………………………3 pc
Observăm că cifra sutelor este un indicator pentru numărarea termenilor aşezaţi în ordine crescătoare.
Deoarece $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, rezultă că al 20-lea număr din șir va fi penultimul din grupa celor care au cifra sutelor 6, adică **10…0685**. ………………..…3 pc

Problema 3
Fiind întrebat câţi ani are, un băiat răspunde:
- Am 3 fraţi. Cel mai mare dintre ei are cu 3 ani mai mult decât jumătate din vârsta mea. Sora noastră are 9 ani. Un alt frate are de 6 ori mai puţin decât vârsta mea. Dacă adunaţi vârsta fratelui mai mare cu cea a surorii şi scădeţi vârsta celuilalt frate obţineţi vârsta mea.

Câţi ani are băiatul?

(înv.Ştefăniţă Adriana)

Soluție:
Oficiu……………………………………………………………………..…2 pc



Pentru reprezentarea grafică……………………………………………………..…….4 pc
2p+3+9=6p 4p=12 p=3
Eu=3x6=18 ani
Frate mare=3x3+3=12 ani
Frate mic=3 ani
Sora = 9 ani……………………………………………………………………....4 pc

Problemă departajare

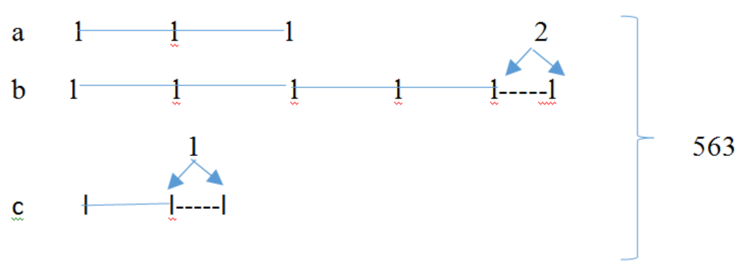
Suma a trei numere este 563. Al doilea număr este cu 2 mai mare decât dublul primului număr, iar al treilea de 2 ori mai mic decât diferența primelor două numere. Aflați numerele.

(înv.Ciubotariu Gabriela)

Soluție:

Oficiu…………………………………………………………………………2 pc
Fie numerele a, b, c. Din enunț rezultă că numărul mai mic este c.
a + b+ c=563
b = 2a + 2
c = (b – a) : 2

Dacă b = a + a + 2 , rezultă că diferența dintre primele două numere este a + 2 , iar c este cât jumătate din a plus 1.
Rezultă următoarea reprezentare grafică



Pentru reprezentarea grafică ……………………………………………………..…..3 pc
Egalarea părților : 563 – 3 = 560
(560 reprezintă 7 părți egale) ……………………………………………….….1 pc
Cât reprezintă o parte?
560 : 7 = 80 ……………………………………………………………1 pc
Cât este al treilea număr?
80 + 1 = 81 ……………………………………………………………………1 pc
Cât este primul număr?
80 x 2 = 160 ………………………………………………………………..…..1 pc
Cât este al doilea număr ?
80 x 4 + 2 =322 …………………………………………………...…1 pc

Concursul interjudeţean de matematică „Misterele Matematicii”
Ediţia a X a, 27 martie 2016, Vaslui
Clasa a V-a

Problema 1
Fie m, n, p numere naturale distincte, a căror sumă este 2016. Ştiind că prin împărţirea lor la 11 se obţine de fiecare dată acelaşi rest, iar cel mai mic cât al lor este mai mare decât 59, să se afle cele trei numere.

Gazeta Matematică

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………………...…2 pc
$m=11\cdot a+r$, $n=11\cdot b+r$, $p=11\cdot c+r$, $r<11$…………………………………………....……………..1 pc
cum m, n, p sunt distincte, rezultă că şi a, b, c sunt distincte.
Cum cel mai mic cât este mai mare decât 59,
cele mai mici câturi posibile vor fi 60, 6162……………………………………………………..2 pc
$m+n+p=11\cdot(60+61+62)+3r$, adică $2016=2013+3r$, deci $r=1$…………………………………...…2 pc
Nr. m, n, p sunt 661, 672 şi 683……………………………………………………………...…2 pc
Justificarea că soluţia este unică……………………………………………………………..…1 pc

Problema 2
Pe ecranul unui calculator, într-un tabel sunt scrise numerele 3,0,1,2, iar la fiecare pas se măreşte cu 4 cel mai mic număr din linia anterioară:

a) Completaţi tabelul de mai jos, respectând regula precizată

	3	0	1	2
Pasul 1	3	4	1	2
Pasul 2				
Pasul 3				
Pasul 4				
Pasul 5				
Pasul 6				

b) Să se determine numărul situat pe coloana a treia din pasul 2016 .
c) Să se calculeze suma numerelor de pe coloana 1 până la pasul 100 inclusiv.

Prof. Obreja Mirela şi Anton Flavia

Rezolvare:

Oficiu………………………………………………………… ………………………...…2 pc

a)

	3	0	1	2
Pasul 1	3	4	1	2
Pasul 2	3	4	5	2
Pasul 3	3	4	5	6
Pasul 4	7	4	5	6
Pasul 5	7	8	5	6
Pasul 6	7	8	9	6

……………………………………………………………………………………....2 pc

b) Observă că

	3	0	1	2
	……	……	……	……..
Pasul 4k	3+4k	0+4k	1+4k	2+4k
Pasul 4k+1	3+4k	0+4(k+1)	1+4k	2+4k
Pasul 4k+2	3+4k	0+4(k+1)	1+4(k+1)	2+4k
Pasul 4k+3	3+4k	0+4(k+1)	1+4(k+1)	2+4(k+1)

………………………………………………………………………………………….……3 pc
2016 se divide cu 4, deci este de forma 4k, $2016=4\cdot 504$
Numărul de pe coloana a treia este $1+4\cdot 504=2017$

c) Sunt exact 25 de grupe de câte 4 numere egale, de forma 3, (3+4), $(3+4\cdot 2)$,…$(3+4\cdot 24)$

Suma este egală cu
S=3·4+(3+4)·4+(3+4·2)·4+…+(3+4·24)·4=3·4·25+4^2·(1+2+…+24)=5100…………………...3 pc

Problema 3

Despre o mulțime nevidă spunem că este ***prietenoas***ă dacă este formată din numere naturale consecutive
a căror sumă este un număr impar.
a) Demonstrați că orice mulțime formată din 2010 numere naturale consecutive este *prietenoas*ă ;
b) Dacă A, B sunt ***prietenoase*** și $A \cap B$ are exact două elemente consecutive, arătați că mulțimea $A \cup B$ este ***prietenoas***ă.

(***)

Rezolvare:

Oficiu………………………………………………………………………………..………2 pc

Numerele sunt $k, k+1, \ldots, k+2009$. Suma lor este $2010k + 2009 \cdot 1005$, deci este număr impar; ……………………………………………………………………………………..3 pc

Fie $S = A \cup B$. Vom avea $\sum_{x \in S} x = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x - \sum_{x \in A \cap B} x$. Dar $\sum_{x \in A} x$ și $\sum_{x \in B} x$ sunt numere impare, iar $\sum_{x \in A \cap B} x$ este număr impar ca sumă de două numere consecutive. Deducem că $\sum_{x \in S} x$ este impar și de aici concluzia.(Prin $\sum_{x \in A} x$ am notat suma elementelor mulțimii A .)
……………………………………………………………………………………..5 pc

Problema departajare

Prin împărţirea unui număr natural d la 5 se obţine câtul a şi restul 3, iar prin împărţirea lui d la 7 se obţine câtul b şi restul 5, unde a, $b \in \mathbf{N}$.

a) Poate fi numărul d egal cu 2013?

b) Calculaţi restul împărţirii numărului d la 35.

c) Demonstraţi că $b = M_5 + 4$.

d) Demonstraţi că $a + b \neq 2016$.

(***)

Rezolvare:

Oficiu………………………………………………………………………………………2 pc

a) $2013 = 5 \cdot 402 + 3$; $2013 = 7 \cdot 287 + 4 \neq 7b + 5 \Rightarrow d \neq 2013$ ………………………………….…2 pc

b) $d + 2 = 5a + 5 = 5 \cdot (a+1)$; $d + 2 = 7b + 7 = 7 \cdot (b+1) \Rightarrow d + 2 = M_{35} \Rightarrow d = M_{35} + 33$
şi restul împărţirii lui d la 35 este 33……………………………………………………………….…...3 pc

c) $d = M_{35} + 33$ implică $7b + 5 = 35c + 33 \Rightarrow 7b = 35c + 28 \Rightarrow b = 5c + 4$ ……………………….…..…1 pc

d) Înmulţind relaţia $d = 5a + 3$ cu 7 şi relaţia $d = 7b + 5$ cu 5
şi adunând cele 2 relaţii se obţine $12d = 35(a + b) + 46$.
Dacă că a+b=2016, ar rezulta că
$12d = 35 \cdot 2016 + 46 \Rightarrow d = (35 \cdot 2016 + 46) : 12 \notin N$, contradicţie……………………………..….2 pc

Concursul interjudeţean de matematică „Misterele Matematicii”
Ediţia a X-a, 27 martie 2016, Vaslui
Clasa a VI-a

Problema 1

Aflaţi numerele naturale x, y, z, ştiind că au 2, 3, respectiv 5 divizori, iar media lor aritmetică este 36.

(prof. Agheorghiesei Aurora)

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………………..…2 pc

Cum nr. x, y, z au 2, 3, respectiv 5 divizori , avem că numerele sunt de forma a, b^2, c^4, a, b, c prime…………………………………………………………………………………………1 pc

cum $a+b^2+c^4=108$, deducem că $c \in \{2,3\}$……………………………………………………..1 pc

Dacă c=2, atunci $a+b^2=92$, deci $b \in \{2,3,5,7\}$, cu soluţii pentru a=83, a=67, a=43……………….….2 pc

Dacă c=3, atunci $a+b^2=27$, deci b=2 şi a=23, b=3, dar a nu este prim
şi b=5, a=2……………………………………………………………………………..………2 pc

Deci, $(x,y,z) \in \{(83,9,16),(67,25,16),(43,49,16),(23,4,81),(2,25,81)\}$ ……………………..…..2 pc

Problema 2

Un număr natural de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităţilor 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre şi se obţine restul 98. Calculaţi deîmpărţitul, împărţitorul şi câtul.

(Prof. Obreja Mirela şi Anton Flavia)

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………………….2 pc

$\overline{aab5} = x \cdot q + 98$, $0 \le 98 < x$ şi, cum x are două cifre, rezultă că $x = 99$, deci …………………….....2 pc

$\overline{aab5} = 99 \cdot q + 98$, de unde rezultă că U($99 \cdot q + 98$) este 5, deci U($q$)este 3, ………………..…….1 pc

dar $1105 \le \overline{aab5} \le 9995 \Leftrightarrow 1105 \le 99 \cdot q + 98 \le 9995$, de unde se obţine că $11 \le q \le 99$
şi, cum ultima cifră a lui q este 3, urmează că $q \in \{13, 23, 33, \ldots, 93\}$,
rezultă că deîmpărţitul este egal cu 3365, împărţitorul este egal cu 99
şi câtul este egal cu 33……………………………………………………………………………5 pc

Problema 3

Se consideră ΔABC isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. De aceeaşi parte a dreptei BC se construiesc $DB \perp AB$ şi $EC \perp AC$, astfel încât $BD = CE$ şi $[BD] \cap [CE] = \emptyset$. Să se arate că:

a) Triunghiul ADE este isoscel;
b) Semidreapta [AO este bisectoarea $\sphericalangle DAE$, unde O este mijlocul segmentului [BC];
c) Punctele A, O, M sunt coliniare, unde $\{M\} = DB \cap EC$.

(***)

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………………….2 pc

Cazul I: punctele $D, E \in (BC, A$

a) $\Delta ADB \equiv \Delta AEC$ (c.c.) $\rightarrow [AD] \equiv [AE] \rightarrow \Delta ADE$ isoscel. ……………………………………..1pc

b) $\Delta ABO \equiv \Delta ACO(LLL) \rightarrow \sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle CAO$ (1)
Din punctul a) avem $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CAE$ (2)
Din (1)+(2) avem $\sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle EAO$. Deci semidreapta [AO este bisectoarea $\sphericalangle DAE$……………..….1 pc

c) $AB = AC \rightarrow A \in$ mediatoarei [BC]
$\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MCO \rightarrow \Delta MBC$ isoscel, deci MB=MC, rezultă $M \in$ mediatoarei [BC]
$O \in$ mediatoarei [BC] şi $A \in$ mediatoarei [BC], deci A,O,M coliniare……………………..…….2 pc

Cazul II: punctele $D, E \notin (BC, A$

Analog cu cazul I

a) 1p
b) 1p
c) 2p

Problema departajare

Într-o zi ploioasă de martie Ionel şi Mărioara joacă un joc cu unghiuri, astfel: pornesc de la aceeaşi semidreaptă (OA şi Mărioara desenează unghiuri în sens invers acelor de ceas după modelul: un unghi de 1^0; apoi alt unghi adiacent cu primul şi de măsură dublă faţă de acesta, apoi un al treilea unghi adiacent cu al doilea şi de măsură dublă faţă de acesta, ş.a.m.d; în timp ce Ionel desenează unghiuri în sensul acelor de ceas după modelul: un unghi de 1^0; apoi alt unghi adiacent cu primul şi de măsură triplă faţă de acesta, apoi un al treilea unghi adiacent cu al doilea şi de măsură triplă faţă de acesta, ş.a.m.d. Jocul se opreşte când unghiurile copiilor nu mai au interioarele disjuncte. Să se afle măsura unghiului reprezentat de porţiunea comună a celor două unghiuri.

(Prof. Tamaş Daniela)

Rezolvare:

Oficiu…………………………………………………………………….…………………..…2 pc

Dacă semidreptele desenate de Marioara se notează cu $(OM_1$, $(OM_2$,….
şi semidreptele desenate de Ionel se notează cu $(OI_1$, $(OI_2$,…., avem:

Pasul 1- măsura unghiului M_1OI_1 este de $1^0+1^0=2^0$,
deci cei doi copii nu s-au întâlnit……………………………………………………………….…1 pc

Pasul 2 - măsura unghiului M_2OI_2 este de $(1+2)^0+(1+3)^0=7^0$,
deci cei doi copii nu s-au întâlnit……………………………………………………….…....…1 pc

Pasul 3- măsura unghiului M_3OI_3 este de $(1+2+2^2)^0+(1+3+3^2)^0=20^0$,
deci cei doi copii nu s-au întâlnit……………………………………………………………….…1 pc

Pasul 4- măsura unghiului M_4OI_4 este de $(1+2+2^2+2^3)^0+(1+3+3^2+3^3)^0=55^0$
deci cei doi copii nu s-au întâlnit,…………………………………………………………………1 pc

Pasul 5- măsura unghiului M_5OI_5 este de $(1+2+2^2+2^3+2^4)^0+(1+3+3^2+3^3+3^4)^0=152^0$
deci cei doi copii nu s-au întâlnit,…………………………………………………………….....…1 pc

Pasul 6- măsura unghiului dintre $(OM_6$ şi $(OI_6$ ar fi
$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)^0+(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)^0=364^0$,

Pentru că măsura depăşeşte 360^0, rezultă că cei doi copii s-au întâlnit…………………….…..1 pc

Aşadar, unghiul desenat de Ionel în pasul 6 „acoperă” toate unghiurile desenate de Mărioara, adică porţiunea comună e reprezentată de interiorul unghiului AOM_6, care are măsura de 63^0………..…2 pc

Concursul interjudeţean de matematică „Misterele Matematicii”
Ediţia a X-a, 27 martie 2016, Vaslui
Clasa a VII-a

Problema 1

Fie $A = \left\{x \in N / \frac{x}{\overline{ab}} = \frac{\overline{abab}}{101}\right\}$

a) Arătaţi că x este pătrat perfect, $\forall x \in A$.

b) Dacă $B = \{x \in A\ /x\ este\ număr\ natural\ de\ patru\ cifre\}$, iar S este diferenţa dintre suma tuturor numerelor impare din B şi suma tuturor numerelor pare din B, arătaţi că S-422 este multiplu de 2016.

(prof. Obreja Mirela şi Moşneagu Cristina)

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………….2 pc

a) $x = \frac{\overline{ab}\left(\overline{ab}+100\cdot\overline{ab}\right)}{101} = \overline{ab}^2$, deci x este pătrat perfect……………………………………..…..3 pc

b) $B = \{32^2, 33^2, \ldots, 99^2\}$, card B=68…………………………………………………………2 pc

$S=(33^2+35^2+\ldots+99^2)-(32^2+34^2+\ldots+98^2)=(33^2-32^2)+(35^2-34^2)+\ldots+(99^2-98^2)=$

$=(2\cdot32+1)+(2\cdot34+1)+\ldots+(2\cdot98+1)=4454$……………………………………………………2 pc

$S-422=4454-422=4032=2016\cdot2=M_{2016}$……………………………………………………1 pc

Sau $S=(33^2-32^2)+(35^2-34^2)+\ldots+(99^2-98^2)=$

$=1\cdot65+1\cdot69+\ldots+1\cdot197=65+(65+1\cdot4)+(65+2\cdot4)+\ldots+(65+33\cdot4)=$

$65\cdot34+4(1+2+\ldots+33)=65\cdot34+2\cdot33\cdot34=4454$

Problema 2

a) Fie $a, b, c \in R-\{0\}$, astfel încât $a+b+c=0$. Demonstraţi că $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$

b) Demonstraţi că numărul $x = \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}}$ este raţional.

(***)

Rezolvare:

Oficiu……………………………………………………………………………….2 pc

a)

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{a+b+c}{abc} = 0 \Leftrightarrow 0=0$ adevărat……………………………………………………4 pc

b) Folosind punctul a) obţinem:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} = \left|1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right| = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}; \qquad \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} = \left|1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right| = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4};$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}} = \left|1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right| = 1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$

Adunând aceste egalităţi obţinem: $x = 8+\frac{1}{2}-\frac{1}{10} = \frac{84}{10} = \frac{42}{5} \Rightarrow x \in Q$…………………………...…4 pc

Problema 3
Fie un trapez ABCD cu bazele AB şi CD. Se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM şi CDN. Să se arate că dreptele AC, BD şi MN sunt concurente.

(***)

<u>Rezolvare:</u>

Oficiu……………………………………………………………………………………….…2 pc

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ avem $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC}$ ……………………….…...….1 pc

şi cum AB =AM, DC=CN obţinem $\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$ (1)……………………………………….…...……2 pc

Dar $m(\measuredangle MAO) = 60^\circ + m(\measuredangle BAO) = m(\measuredangle DCN) + m(OCD) = m(OCN)$ (2).………………...2 pc

şi, deci, $\Delta MAO \sim \Delta NCO$ conform relaţiilor (1) şi (2), deci $\measuredangle MOA = \measuredangle NOC$………………......….2 pc

adică M, N, O coliniare deci, AC, BD, MN concurente……………………………………..1 pc.

Problemă de departajare

Un fermier are un teren sub forma unui trapez dreptunghic ABCD cu m(< A) = 90^0 , baza mică DC, BC= 2· DC, iar m(< DCB) = 2 · m(<B). Fermierul îşi extinde suprafaţa fermei construind o paralelă la dreapta AC prin punctul B care intersectează dreapta DC în E, astfel noul teren este patrulaterul ABED care este împărţit în loturile DAC, CAB şi EBC.

a) Arătaţi că lotul ABC are forma unui triunghi echilateral.
b) Arătaţi că distanţa dintre centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi BEC este egală cu o treime din lungimea segmentului AE.

(prof. Anton Ioana)

<u>Rezolvare:</u>

Oficiu…………………………………………………………………………….……..…2 pc

a) m(< ABC) + m (BCD) = 180^0 => m(ABC) = 60^0.
   Fie CT perpendiculara din C pe AB , T pe dreapta AB =>
   TB = CB/2, dar BC= 2· DC => AB = BC => triunghiul ABC echilateral………………………3 pc
b) Fie punctul O intersecţia diagonalelor AE şi BC în rombul ABEC => AO şi EO mediane în triunghiurile ABC, respectiv BCE.
   Triunghiurile ABC şi BEC fiind echilaterale => centrele de greutate ale celor două triunghiuri aparţin segmentului AE. ………………………………………………………2 pc
   Din proprietatea centrului de greutate => distanţa dintre centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi BEC este egală cu o treime din lungimea segmentului AE......................……………3 pc